

Exercices type contrôle — Équations et inéquations trigonométriques

Chapitre 11

Équations élémentaires

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $] -\pi, \pi]$, chacune des équations :

1. $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$;
2. $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$;
3. $\tan x = -\sqrt{3}$.

Solution 1.

1. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, donc $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Dans $] -\pi, \pi]$: $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.
2. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, donc $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. Dans $] -\pi, \pi]$: $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.
3. $\tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, donc $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Dans $] -\pi, \pi]$: $S = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

Équation du type $\cos u = \cos v$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, puis placer les solutions appartenant à $[0, 2\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Solution 2.

$\cos u = \cos v$ équivaut à $u = v + 2k\pi$ ou $u = -v + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- Premier cas : $2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- Second cas : $2x - \frac{\pi}{3} = -x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, soit $3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, donc $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$.

Solutions dans $[0, 2\pi[$: $\frac{\pi}{2}$ (premier cas) et, pour $k = 0, 1, 2$: $\frac{\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}$ (second cas). Soit quatre points sur le cercle.

Équation du type $\sin u = \sin v$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(3x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Solution 3.

$\sin u = \sin v$ équivaut à $u = v + 2k\pi$ ou $u = \pi - v + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- $3x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ donne $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.
- $3x = \pi - x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ donne $4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$.

La première famille est contenue dans la seconde (prendre k pair), donc $S = \{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$.

Équation se ramenant au second degré

Exercice 4. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Solution 4.

On pose $X = \sin x$: $2X^2 - 3X + 1 = 0$, $\Delta = 9 - 8 = 1$, donc $X = 1$ ou $X = \frac{1}{2}$.

- $\sin x = 1$ donne $x = \frac{\pi}{2}$.
- $\sin x = \frac{1}{2}$ donne $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

$$S = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}.$$

Inéquations trigonométriques

Exercice 5. Résoudre dans $] -\pi, \pi]$:

1. $2\cos x - 1 \geq 0$;
2. $2\sin x + \sqrt{3} < 0$.

Solution 5.

1. $2\cos x - 1 \geq 0$ équivaut à $\cos x \geq \frac{1}{2}$. Sur le cercle, les points d'abscisse au moins $\frac{1}{2}$ correspondent aux angles entre $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$: $S = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.
2. $2\sin x + \sqrt{3} < 0$ équivaut à $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les points d'ordonnée strictement inférieure à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ correspondent aux angles strictement compris entre $-\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$: $S =]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$.

Équation $a \cos x + b \sin x = c$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$.

Solution 6.

On factorise par $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$: $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

L'équation devient $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, donc $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, soit $x = 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Vérification : pour $x = 0$, $1 - 0 = 1$; pour $x = -\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{1}{2} - \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$.