

Exercices type contrôle — Bases de la trigonométrie

Chapitre 9

Calcul de sinus et tangente à partir du cosinus

Exercice 1. On donne $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ avec $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

1. Calculer $\sin \alpha$.
2. En déduire $\tan \alpha$.
3. Calculer $\cos(\pi - \alpha)$, $\sin(\pi + \alpha)$ et $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

Solution 1.

1. D'après la relation fondamentale $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$: $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$, donc $\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{21}}{5}$. Comme $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, le point image de α est dans le 4^e quadrant : $\sin \alpha < 0$. Donc $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.
2. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{21}}{2}$.
3. Formules de réduction : $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{2}{5}$; $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$; $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

Expression en fonction du cosinus d'un angle remarquable

Exercice 2. Soit a un réel tel que $\cos a = \frac{1}{2}$ et $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

1. Calculer $A = \cos^3 a + \cos^2 a - \cos a$.
2. Déterminer la valeur de a , puis calculer $\sin a$ et $\tan a$.
3. Calculer $B = 2 \sin a \cos a$ et $C = \cos^2 a - \sin^2 a$.

Solution 2.

1. $A = (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1+2-4}{8} = -\frac{1}{8}$.
2. Sur $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $\cos a = \frac{1}{2}$ donne $a = \frac{\pi}{3}$ (valeur remarquable). Alors $\sin a = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\tan a = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.
3. $B = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $C = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$. (On reconnaît $B = \sin(2a) = \sin(\frac{2\pi}{3})$ et $C = \cos(2a) = \cos(\frac{2\pi}{3})$.)

Équation du second degré et équation trigonométrique

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$.
2. En déduire les solutions dans $] -\pi, \pi]$ de l'équation $4\cos^2 t - 2(\sqrt{3} + 1)\cos t + \sqrt{3} = 0$.

Solution 3.

1. Discriminant : $\Delta = 4(\sqrt{3} + 1)^2 - 16\sqrt{3} = 4(3 + 2\sqrt{3} + 1) - 16\sqrt{3} = 16 - 8\sqrt{3}$. Or $(\sqrt{3} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$, donc $\Delta = 4(\sqrt{3} - 1)^2$ et $\sqrt{\Delta} = 2(\sqrt{3} - 1)$. Les solutions sont $x_1 = \frac{2(\sqrt{3}+1)+2(\sqrt{3}-1)}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{2(\sqrt{3}+1)-2(\sqrt{3}-1)}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
2. En posant $x = \cos t$, l'équation devient celle de la question 1, donc $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos t = \frac{1}{2}$. $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donne $t = \frac{\pi}{6}$ ou $t = -\frac{\pi}{6}$; $\cos t = \frac{1}{2}$ donne $t = \frac{\pi}{3}$ ou $t = -\frac{\pi}{3}$. Ensemble des solutions dans $] -\pi, \pi]$: $S = \{-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\}$.

Simplification par les formules de réduction

Exercice 4. Soit $E(x) = \cos(\pi + x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x) - \cos(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\frac{3\pi}{2} + x)$.

1. Simplifier $E(x)$.
2. Calculer $E(\frac{\pi}{6})$.

Solution 4.

1. Formules de réduction : $\cos(\pi + x) = -\cos x$; $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$; $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x$. Donc $E(x) = -\cos x + \cos x - \cos x + \sin x + \sin x = 2\sin x - \cos x$.
2. $E(\frac{\pi}{6}) = 2 \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Démonstration d'une identité

Exercice 5. Soit x un réel tel que $\cos x \neq 0$.

1. Montrer que $(1 + \sin x)(1 - \sin x) = \cos^2 x$.
2. En déduire que $\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{2}{\cos^2 x}$.
3. Calculer la valeur de cette expression pour $x = \frac{\pi}{4}$.

Solution 5.

1. $(1 + \sin x)(1 - \sin x) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ (identité remarquable puis relation fondamentale). Comme $\cos x \neq 0$, on a $\sin x \neq \pm 1$, donc les dénominateurs de la question 2 sont non nuls.
2. En réduisant au même dénominateur : $\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{(1 + \sin x) + (1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{2}{\cos^2 x}$.
3. Pour $x = \frac{\pi}{4}$: $\cos^2(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, donc l'expression vaut $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$.