

Exercices type contrôle — L'ordre dans $\mathbb{R}$

Chapitre 3

Comparer sans calculatrice

Exercice 1. Comparer les nombres suivants en justifiant :

1. $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$;
2. $\frac{3}{7}$ et $\frac{4}{9}$;
3. x^2 et x lorsque $0 < x < 1$.

Solution 1.

1. Les deux nombres sont positifs ; on compare leurs carrés : $(2\sqrt{3})^2 = 12$ et $(3\sqrt{2})^2 = 18$. Comme $12 < 18$, on a $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.
2. $\frac{3}{7} - \frac{4}{9} = \frac{27-28}{63} = -\frac{1}{63} < 0$, donc $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$.
3. $x^2 - x = x(x-1)$. Pour $0 < x < 1$: $x > 0$ et $x-1 < 0$, donc $x^2 - x < 0$, c'est-à-dire $x^2 < x$.

Encadrements de sommes, produits et inverses

Exercice 2. On sait que $2 \leq x \leq 3$ et $-1 \leq y \leq 1$. Encadrer :

1. $x + y$ et $x - y$;
2. x^2 et $\frac{1}{x}$;
3. xy .

Solution 2.

1. En ajoutant membre à membre : $1 \leq x + y \leq 4$. De $-1 \leq y \leq 1$ on tire $-1 \leq -y \leq 1$, puis $1 \leq x - y \leq 4$.
2. La fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$ et $x \geq 2 > 0$, donc $4 \leq x^2 \leq 9$. La fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.
3. Attention : y peut être négatif, on ne multiplie pas directement les encadrements. Comme $x > 0$, xy est du signe de y et $|xy| = x|y| \leq 3 \times 1 = 3$. Donc $-3 \leq xy \leq 3$ (bornes atteintes pour $x = 3, y = \pm 1$).

Inégalités classiques

Exercice 3.

1. Montrer que pour tous réels a et b : $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
2. En déduire que pour tous réels strictement positifs a et b : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
3. Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b : $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

Solution 3.

1. $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$, d'où $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
2. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$. Comme $ab > 0$ et $a^2 + b^2 \geq 2ab$, on obtient $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab} = 2$.
3. En développant : $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2 + 2 = 4$ d'après la question 2.

Encadrer une expression

Exercice 4. Soit x un réel tel que $1 \leq x \leq 2$.

1. Encadrer $\frac{1}{x}$.
2. En déduire un encadrement de $A = \frac{2x+1}{x}$.
3. Montrer que $2 \leq x + \frac{1}{x} \leq 3$.

Solution 4.

1. La fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$.
2. $A = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$, donc $2 + \frac{1}{2} \leq A \leq 2 + 1$, soit $\frac{5}{2} \leq A \leq 3$.
3. Minoration : $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2-2x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, donc $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Majoration : $x \leq 2$ et $\frac{1}{x} \leq 1$, donc $x + \frac{1}{x} \leq 3$.

Valeurs approchées

Exercice 5. On donne $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$ et $1,732 \leq \sqrt{3} \leq 1,733$.

1. Encadrer $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ et $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.
2. Encadrer $\sqrt{6}$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Solution 5.

1. Somme : $3,146 \leq \sqrt{2} + \sqrt{3} \leq 3,148$. Différence : de $-1,415 \leq -\sqrt{2} \leq -1,414$ on tire $1,732 - 1,415 \leq \sqrt{3} - \sqrt{2} \leq 1,733 - 1,414$, soit $0,317 \leq \sqrt{3} - \sqrt{2} \leq 0,319$.
2. $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ et tous les termes sont positifs : $1,414 \times 1,732 \leq \sqrt{6} \leq 1,415 \times 1,733$, soit $2,449 \leq \sqrt{6} \leq 2,453$ (en arrondissant les bornes vers l'extérieur). L'amplitude de l'encadrement est $0,004 < 10^{-2}$; on peut donc prendre $\sqrt{6} \approx 2,45$ à 10^{-2} près (en effet $|\sqrt{6} - 2,45| \leq 0,003 < 0,01$).

Erreur absolue et erreur relative

Exercice 6.

1. Une longueur est mesurée : $L = 12,5$ cm avec une erreur absolue inférieure ou égale à 0,1 cm. Encadrer L et majorer l'erreur relative.
2. On remplace π par 3,14. Sachant que $3,1415 < \pi < 3,1416$, majorer l'erreur absolue puis l'erreur relative commises.

Solution 6.

1. $12,4 \leq L \leq 12,6$. L'erreur relative est majorée par $0, \frac{1}{12,5} = 0,008$, soit 0,8%.
2. Erreur absolue : $|\pi - 3,14| < 3,1416 - 3,14 = 0,0016$. Erreur relative : $|\pi - 3,14|_{\pi} < 0, \frac{0,0016}{3,14} \approx 5,1 \times 10^{-4}$, soit environ 0,05%.