

Exercices type contrôle — Entiers naturels et arithmétique

Chapitre 1

Division euclidienne

Exercice 1.

1. Effectuer la division euclidienne de 2025 par 47.
2. Dans la division euclidienne d'un entier n par 17, le reste est 11 et le quotient est le double du reste. Déterminer n .
3. Déterminer les entiers naturels n dont le quotient et le reste dans la division euclidienne par 7 sont égaux.

Solution 1.

1. $47 \times 43 = 2021$ et $2021 + 4 = 2025$, donc $2025 = 47 \times 43 + 4$: quotient 43, reste 4 (et $0 \leq 4 < 47$).
2. $n = 17q + 11$ avec $q = 2 \times 11 = 22$: $n = 374 + 11 = 385$.
3. $n = 7q + r$ avec $r = q$ et $0 \leq r < 7$, donc $n = 8q$ avec $q \in \{0, 1, \dots, 6\}$: $n \in \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48\}$.

Divisibilité

Exercice 2.

1. Soient a, b, c des entiers naturels. Démontrer que si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors $a \mid (3b + 2c)$.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $(n + 3)$ divise $(n + 9)$.

Solution 2.

1. Si $b = ak$ et $c = al$, alors $3b + 2c = 3ak + 2al = a(3k + 2l)$, donc a divise $3b + 2c$.
2. $n + 9 = (n + 3) + 6$. Si $(n + 3) \mid (n + 9)$, alors $(n + 3)$ divise $(n + 9) - (n + 3) = 6$. Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3, 6 ; comme $n + 3 \geq 3$, on a $n + 3 = 3$ ou $n + 3 = 6$, soit $n = 0$ ou $n = 3$. Vérification : $3 \mid 9$ et $6 \mid 12$.

Nombres premiers

Exercice 3.

1. Le nombre 221 est-il premier ?
2. Décomposer en produit de facteurs premiers 1001 et 2024.
3. Combien 2024 possède-t-il de diviseurs ?

Solution 3.

1. $\sqrt{221} \approx 14,9$: on teste les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13. $221 = 13 \times 17$, donc 221 n'est pas premier.
2. $1001 = 7 \times 143 = 7 \times 11 \times 13$; $2024 = 2^3 \times 253 = 2^3 \times 11 \times 23$.
3. Un diviseur de $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$ s'écrit $2^i \times 11^j \times 23^k$ avec $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $j \in \{0, 1\}$, $k \in \{0, 1\}$: $4 \times 2 \times 2 = 16$ diviseurs.

PGCD, PPCM et algorithme d'Euclide

Exercice 4.

1. Calculer $\text{pgcd}(1071, 462)$ par l'algorithme d'Euclide, puis $\text{ppcm}(1071, 462)$.
2. On veut carreler une pièce rectangulaire de 1071 cm sur 462 cm avec des carreaux carrés identiques, sans découpe, les plus grands possibles. Quelle est la taille des carreaux et combien en faut-il ?

Solution 4.

1. $1071 = 462 \times 2 + 147$; $462 = 147 \times 3 + 21$; $147 = 21 \times 7 + 0$. Donc $\text{pgcd}(1071, 462) = 21$ et $\text{ppcm}(1071, 462) = \frac{1071 \times 462}{21} = 51 \times 462 = 23\,562$.
2. Le côté des carreaux doit diviser 1071 et 462 ; le plus grand possible est $\text{pgcd}(1071, 462) = 21$ cm. Il faut $\left(\frac{1071}{21}\right) \times \left(\frac{462}{21}\right) = 51 \times 22 = 1122$ carreaux.

Nombres premiers entre eux

Exercice 5.

1. Deux bus partent ensemble d'une gare à 6 h. Le premier repart toutes les 24 minutes, le second toutes les 36 minutes. À quelle heure repartent-ils ensemble pour la première fois ?
2. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a \leq b$, $\text{pgcd}(a, b) = 12$ et $\text{ppcm}(a, b) = 252$.

Solution 5.

1. Le prochain départ commun a lieu au bout de $\text{ppcm}(24, 36)$ minutes. $24 = 2^3 \times 3$ et $36 = 2^2 \times 3^2$, donc $\text{ppcm} = 2^3 \times 3^2 = 72$ minutes : à 7 h 12.
2. On écrit $a = 12a'$ et $b = 12b'$ avec a' et b' premiers entre eux. Alors $ab = \text{pgcd} \times \text{ppcm} = 12 \times 252 = 3024$, donc $a'b' = \frac{3024}{144} = 21$. Les couples (a', b') premiers entre eux avec $a' \leq b'$ et $a'b' = 21$ sont $(1, 21)$ et $(3, 7)$. D'où $(a, b) = (12, 252)$ ou $(a, b) = (36, 84)$.