

Exercices type contrôle — Logique mathématique

Chapitre 1

Quantificateurs, négation, contraposée

Exercice 1.

- Pour chaque proposition, donner sa valeur de vérité (en justifiant) puis écrire sa négation :
 - (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 > 0$;
 - (b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$;
 - (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire la contraposée puis la réciproque de l'implication « si n^2 est multiple de 3 alors n est multiple de 3 ». Démontrer la contraposée. Que peut-on conclure ?

Solution 1.

- (a) Vraie : $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 \leq 0$. (b) Fausse : il n'existe pas de réel inférieur à tous les réels (pour tout x , $y = x - 1$ vérifie $y < x$). Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y < x$. (c) Fausse : pour $x = 2$, $x^2 + y^2 = 4 + y^2 \geq 4 > 1$ quel que soit y . Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 1$.
- Contraposée : « si n n'est pas multiple de 3, alors n^2 n'est pas multiple de 3 ». Réciproque : « si n est multiple de 3, alors n^2 est multiple de 3 ». Démonstration de la contraposée : si $n = 3k + 1$, $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$; si $n = 3k + 2$, $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Dans les deux cas n^2 n'est pas multiple de 3. La réciproque est vraie aussi ($n = 3k$ donne $n^2 = 3(3k^2)$) : on conclut que « n^2 multiple de 3 $\Leftrightarrow n$ multiple de 3 ».

Raisonnement par l'absurde

Exercice 2.

- Démontrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel.
- En déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Solution 2.

- Supposons $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Alors $p^2 = 6q^2$ est pair, donc p est pair : $p = 2k$. Alors $4k^2 = 6q^2$, soit $2k^2 = 3q^2$: $3q^2$ est pair, donc q^2 est pair (car 3 est impair), donc q est pair. p et q seraient tous deux pairs, contradiction.

2. Supposons $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ rationnel. Alors $r^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$, donc $\sqrt{6} = \frac{r^2-5}{2}$ serait rationnel (opérations sur des rationnels), ce qui contredit la question 1. Donc $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Récurrence : une somme télescopique

Exercice 3. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Solution 3.

Soit $P(n)$ l'égalité à démontrer.

Initialisation. $n = 1$: $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

Hérédité. Supposons $P(n)$. Alors la somme au rang $n+1$ vaut $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$, ce qui est $P(n+1)$.

Conclusion. L'égalité est vraie pour tout $n \geq 1$.

Récurrence : encadrement et monotonie d'une suite

Exercice 4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Calculer u_1 et u_2 .
- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 4$.
- Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Solution 4.

1. $u_1 = \sqrt{4} = 2$; $u_2 = \sqrt{10} \approx 3,16$.

2. **Initialisation.** $u_0 = 0 \in [0, 4]$. **Hérédité.** Si $0 \leq u_n \leq 4$, alors $4 \leq 3u_n + 4 \leq 16$, donc $2 \leq u_{n+1} \leq 4$, en particulier $0 \leq u_{n+1} \leq 4$. **Conclusion.** $0 \leq u_n \leq 4$ pour tout n .

3. Comme $u_n \geq 0$: $u_{n+1} \geq u_n \iff 3u_n + 4 \geq u_n^2 \iff u_n^2 - 3u_n - 4 \leq 0 \iff (u_n - 4)(u_n + 1) \leq 0$. Or $0 \leq u_n \leq 4$ donne $u_n - 4 \leq 0$ et $u_n + 1 > 0$: le produit est négatif ou nul. La suite est donc croissante.

Récurrence : divisibilité

Exercice 5.

- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ est divisible par 9.
- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 6.

Solution 5.

1. **Initialisation.** $10^0 - 1 = 0$. **Hérédité.** Si $10^n - 1 = 9k$, alors $10^{n+1} - 1 = 10 \times 10^n - 1 = 10(9k + 1) - 1 = 90k + 9 = 9(10k + 1)$. **Conclusion.** Vrai pour tout n .
2. **Initialisation.** $0^3 - 0 = 0$. **Hérédité.** Supposons $n^3 - n = 6k$. Alors $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n(n+1)$. Or $n(n+1)$ est pair (produit de deux entiers consécutifs), donc $3n(n+1)$ est multiple de 6, et $(n+1)^3 - (n+1) = 6k + 6k'$ est multiple de 6. **Conclusion.** 6 divise $n^3 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.