

Mathématiques financières

Chapitre 8

Placer un capital, épargner chaque mois, rembourser un emprunt : toutes ces opérations reposent sur les suites arithmétiques et géométriques vues au chapitre des suites, et sur le logarithme pour retrouver une durée. Ce chapitre rassemble les formules et le vocabulaire des mathématiques financières au programme : intérêts simples et composés, actualisation, annuités et tableau d'amortissement.

Intérêts simples

Définition — Intérêt simple

Un capital C placé au taux t par période (par exemple $t = 0,04$ pour 4% par an) produit à chaque période le même intérêt $I = Ct$. Après n périodes, l'intérêt total est $I_n = Ctn$ et la *valeur acquise* est

$$C_n = C(1 + nt).$$

La suite (C_n) est **arithmétique** de raison Ct : le capital croît d'une quantité fixe à chaque période. Les intérêts ne produisent pas eux-mêmes d'intérêt.

Exemple. 12 000 DH placés à 6% par an à intérêts simples pendant 8 mois : la durée est $n = \frac{8}{12}$ d'année, donc $I = 12\,000 \times 0,06 \times \frac{8}{12} = 480$ DH et la valeur acquise est 12 480 DH.

Propriété — Taux proportionnel

À intérêts simples, un taux annuel t correspond à un taux mensuel $\frac{t}{12}$ et à un taux trimestriel $\frac{t}{4}$: on dit que les taux sont *proportionnels*. Ainsi 6% par an équivaut à 0,5% par mois.

Intérêts composés

Définition — Intérêt composé

À intérêts composés, l'intérêt de chaque période s'ajoute au capital et produit lui-même des intérêts (on dit qu'il est *capitalisé*). Après n périodes au taux t , la valeur acquise du capital C est

$$C_n = C(1 + t)^n.$$

Démonstration. $C_1 = C + Ct = C(1 + t)$; puis $C_2 = C_1(1 + t) = C(1 + t)^2$; et de proche en proche $C_{n+1} = C_n(1 + t)$. La suite (C_n) est **géométrique** de raison $1 + t$, d'où $C_n = C(1 + t)^n$. ■

Exemple. 25 000 DH placés à 3% par an à intérêts composés pendant 5 ans : $C_5 = 25\,000 \times 1,03^5 \approx 25\,000 \times 1,15927 \approx 28\,981,85$ DH. L'intérêt total est d'environ 3 981,85 DH, contre $25\,000 \times 0,03 \times 5 = 3\,750$ DH à intérêts simples.

Retrouver une durée : le logarithme

Quand l'inconnue est le nombre de périodes n , on prend le logarithme des deux membres (la fonction $\ln$ est strictement croissante) :

$$C(1+t)^n \geq A \Leftrightarrow n \ln(1+t) \geq \ln\left(\frac{A}{C}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{A}{C}\right)}{\ln(1+t)}.$$

Exemple. Au bout de combien d'années un capital placé à 5% composé a-t-il doublé ? $1,05^n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 0, \frac{6931}{0,0488} \approx 14,2$: au bout de 15 ans.

Taux équivalents

Définition — Taux équivalents

À intérêts composés, un taux mensuel t_m et un taux annuel t_a sont *équivalents* lorsqu'ils donnent la même valeur acquise au bout d'un an :

$$(1+t_m)^{12} = 1+t_a, \quad \text{soit} \quad t_m = (1+t_a)^{\frac{1}{12}} - 1.$$

Exemple. Le taux mensuel équivalent à 6% annuel est $t_m = 1,06^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0,00487$, soit environ 0,487% par mois, légèrement inférieur au taux proportionnel 0,5%.

Actualisation : valeur actuelle

Recevoir 10 000 DH aujourd'hui ou dans trois ans, ce n'est pas équivalent : placés dès aujourd'hui, ils rapporteraient des intérêts. L'*actualisation* ramène une somme future à sa valeur d'aujourd'hui.

Définition — Valeur actuelle

Au taux t par période, la *valeur actuelle* d'une somme V_n disponible dans n périodes est le capital V_0 qu'il faudrait placer aujourd'hui pour obtenir V_n :

$$V_0 = V_n(1+t)^{-n} = \frac{V_n}{(1+t)^n}.$$

Exemple. À 4% par an, la valeur actuelle de 50 000 DH disponibles dans 3 ans est $50\,000 \times 1,04^{-3} \approx 50 \frac{000}{1,12486} \approx 44\,449,82$ DH.

Annuités constantes

Définition — Annuité

Une *annuité* est une suite de versements égaux a , effectués à intervalles réguliers (souvent en fin d'année). On note i le taux par période et n le nombre de versements.

Théorème — Valeur acquise d'une suite d'annuités

La valeur acquise, juste après le n -ième versement de fin de période, d'une suite de n annuités constantes a au taux i est

$$V_n = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Démonstration. Le premier versement est capitalisé pendant $n-1$ périodes, le deuxième pendant $n-2$, ..., le dernier pendant 0 période : $V_n = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + \dots + a(1+i) + a$. C'est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = 1+i$ et de premier terme a : $V_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$. ■

Exemple. 5 000 DH versés en fin d'année pendant 6 ans à 4% : $V_6 = 5\,000 \times \frac{1,04^6 - 1}{0,04} \approx 5\,000 \times 6,63298 \approx 33\,164,88$ DH.

Théorème — Valeur actuelle d'une suite d'annuités

La valeur actuelle (une période avant le premier versement) de n annuités constantes a au taux i est

$$V_0 = a \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}.$$

Démonstration. On actualise V_n sur n périodes : $V_0 = V_n(1+i)^{-n} = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)^{-n} = a \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$. ■

Emprunt à annuités constantes

Un emprunt de C DH remboursé par n annuités constantes a au taux i vérifie : la valeur actuelle des annuités est égale au capital emprunté.

Théorème — Annuité de remboursement

$$C = a \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{Ci}{1 - (1+i)^{-n}}.$$

Exemple. 120 000 DH empruntés sur 5 ans à 6% : $a = \frac{120\,000 \times 0,06}{1 - 1,06^{-5}} \approx 7 \frac{200}{0,25274} \approx 28\,487,57$ DH par an. Le total remboursé est $5 \times 28\,487,57 \approx 142\,437,85$ DH ; le coût du crédit est d'environ 22 437,85 DH.

Tableau d'amortissement

Chaque annuité se décompose en *intérêt* et *amortissement* (la part qui rembourse réellement le capital).

Propriété — Ligne du tableau

Si K_{k-1} est le capital restant dû au début de la période k :

- intérêt de la période : $I_k = iK_{k-1}$;
- amortissement : $m_k = a - I_k$;
- capital restant dû : $K_k = K_{k-1} - m_k$.

Les amortissements forment une suite géométrique de raison $1 + i$ ($m_{k+1} = m_k(1 + i)$) et leur somme vaut C .

Exemple. Emprunt de 100 000 DH sur 4 ans à 5% : $a = 5 \frac{000}{1-1,05^{-4}} \approx 28\,201,18$ DH.

Année	Capital dû	Intérêt	Amortissement	Annuité
1	100 000,00	5 000,00	23 201,18	28 201,18
2	76 798,82	3 839,94	24 361,24	28 201,18
3	52 437,58	2 621,88	25 579,30	28 201,18
4	26 858,28	1 342,91	26 858,27	28 201,18

On vérifie que $24\,361,24 \approx 23\,201,18 \times 1,05$ et que la somme des amortissements vaut 100 000 DH (aux arrondis près).

Ce qu'il faut retenir

- Intérêts simples : $C_n = C(1 + nt)$, suite arithmétique.
- Intérêts composés : $C_n = C(1 + t)^n$, suite géométrique ; durée par le logarithme : $n \geq \frac{\ln(\frac{A}{C})}{\ln(1+t)}$.
- Taux équivalents : $(1 + t_m)^{12} = 1 + t_a$.
- Valeur actuelle : $V_0 = V_n(1 + t)^{-n}$.
- Annuités constantes : valeur acquise $\frac{a((1+i)^n - 1)}{i}$, valeur actuelle $\frac{a(1 - (1+i)^{-n})}{i}$.
- Emprunt : $a = C \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$; intérêt = $i \times$ capital restant dû ; amortissement = $a -$ intérêt.