

Exercices type bac — Mathématiques financières

Chapitre 8

Placement à intérêts composés

Exercice 1. Un capital de 40 000 DH est placé à intérêts composés au taux annuel de 4%. On note C_n le capital acquis après n années.

1. Justifier que (C_n) est une suite géométrique et exprimer C_n en fonction de n .
2. Calculer C_6 (on donne $1,04^6 \approx 1,26532$).
3. À partir de quelle année le capital dépasse-t-il 60 000 DH ? (On donne $\ln 1,5 \approx 0,4055$ et $\ln 1,04 \approx 0,0392$.)

Solution 1.

1. Chaque année le capital est multiplié par 1,04 : $C_{n+1} = 1,04C_n$. (C_n) est géométrique de raison 1,04 et de premier terme $C_0 = 40\,000$, donc $C_n = 40\,000 \times 1,04^n$.
2. $C_6 \approx 40\,000 \times 1,26532 \approx 50\,612,80$ DH.
3. $C_n \geq 60\,000 \iff 1,04^n \geq 1,5 \iff n \geq \frac{\ln 1,5}{\ln 1,04} \approx 10,3$. Le capital dépasse 60 000 DH à partir de la 11^e année.

Intérêts simples ou intérêts composés ?

Exercice 2. Un capital C peut être placé soit à 5% par an à intérêts simples (placement A), soit à 4% par an à intérêts composés (placement B).

1. Exprimer en fonction de n les valeurs acquises A_n et B_n après n années.
2. Quel placement est le plus avantageux au bout de 10 ans ? de 15 ans ? (On donne $1,04^{10} \approx 1,4802$ et $1,04^{15} \approx 1,8009$.)
3. Sachant que $1,04^{11} \approx 1,5395$ et $1,04^{12} \approx 1,6010$, déterminer à partir de quelle année le placement B devient le plus avantageux.

Solution 2.

1. $A_n = C(1 + 0,05n)$ et $B_n = C \times 1,04^n$.
2. Après 10 ans : $A_{10} = 1,5C$ et $B_{10} \approx 1,4802C$: A est plus avantageux. Après 15 ans : $A_{15} = 1,75C$ et $B_{15} \approx 1,8009C$: B est plus avantageux.
3. Après 11 ans : $A_{11} = 1,55C > 1,5395C$; après 12 ans : $A_{12} = 1,60C < 1,6010C$. Le placement B devient le plus avantageux à partir de la 12^e année.

Épargne par annuités constantes

Exercice 3. Une personne verse 6 000 DH à la fin de chaque année pendant 5 ans sur un compte rémunéré à 3,5% (on donne $1,035^5 \approx 1,18769$).

1. Calculer la valeur acquise juste après le cinquième versement.
2. Quelle annuité constante faudrait-il verser, dans les mêmes conditions, pour disposer de 40 000 DH après le cinquième versement ?

Solution 3.

1. $V_5 = 6\,000 \times \frac{1,035^5 - 1}{0,035} \approx 6\,000 \times 0, \frac{18769}{0,035} \approx 6\,000 \times 5,3626 \approx 32\,175,43$ DH.
2. $a \times \frac{1,035^5 - 1}{0,035} = 40\,000$ donne $a = \frac{40\,000 \times 0,035}{0,18769} \approx 1 \frac{400}{0,18769} \approx 7\,459,11$ DH.

Emprunt à annuités constantes

Exercice 4. Une entreprise emprunte 200 000 DH remboursables par 10 annuités constantes de fin d'année au taux de 5% (on donne $1,05^{-10} \approx 0,61391$).

1. Calculer l'annuité.
2. Calculer le coût total du crédit.
3. Calculer l'intérêt et l'amortissement de la première annuité, puis de la deuxième.

Solution 4.

1. $a = \frac{200\,000 \times 0,05}{1 - 1,05^{-10}} \approx 10 \frac{000}{0,38609} \approx 25\,900,70$ DH.
2. Total remboursé : $10 \times 25\,900,70 = 259\,007$ DH ; coût du crédit $\approx 59\,007$ DH.
3. Première annuité : intérêt $I_1 = 0,05 \times 200\,000 = 10\,000$ DH, amortissement $m_1 = 25\,900,70 - 10\,000 = 15\,900,70$ DH. Capital restant dû : 184 099,30 DH. Deuxième annuité : $I_2 = 0,05 \times 184\,099,30 \approx 9\,204,97$ DH et $m_2 \approx 16\,695,73$ DH (on vérifie $m_2 \approx m_1 \times 1,05$).

Actualisation et choix entre deux offres

Exercice 5. Une personne a le choix entre recevoir 30 000 DH aujourd'hui ou 34 000 DH dans 3 ans.

1. Quelle offre est la plus intéressante si le taux d'actualisation est de 4% ? (On donne $1,04^3 = 1,124864$.)
2. Même question avec un taux de 5% ($1,05^3 = 1,157625$).

Solution 5.

1. Valeur actuelle de 34 000 DH dans 3 ans à 4% : $34 \frac{000}{1,124864} \approx 30\,225,88$ DH $> 30\,000$: il vaut mieux attendre les 34 000 DH.
2. À 5% : $34 \frac{000}{1,157625} \approx 29\,370,46$ DH $< 30\,000$: il vaut mieux prendre les 30 000 DH aujourd'hui. Plus le taux est élevé, plus l'argent futur est « déprécié ».