

Exercices type contrôle — Logarithme décimal

Chapitre 6

On donne $\log 2 \approx 0,301$ et $\log 3 \approx 0,477$.

Calculs et comparaison

Exercice 1. On pose $a = \log 2$ et $b = \log 3$.

1. Exprimer en fonction de a et b : $\log 72$, $\log 0,6$, $\log 2,5$ et $\log(\frac{4}{9})$.
2. Comparer 5^{12} et 10^8 sans les calculer.

Solution 1.

1. $\log 72 = \log(8 \times 9) = 3a + 2b$; $\log 0,6 = \log(\frac{6}{10}) = a + b - 1$; $\log 2,5 = \log(\frac{10}{4}) = 1 - 2a$; $\log(\frac{4}{9}) = 2a - 2b$.
2. $\log 5^{12} = 12 \log 5 = 12(1 - a) \approx 12 \times 0,699 = 8,39 > 8 = \log 10^8$. Comme $\log$ est croissante, $5^{12} > 10^8$.

Équation et inéquation

Exercice 2.

1. Résoudre l'équation $\log(x + 2) + \log(x - 1) = \log 4$.
2. Résoudre l'inéquation $\log(2x + 1) \leq 1 + \log(x - 1)$.

Solution 2.

1. Domaine : $x + 2 > 0$ et $x - 1 > 0$, soit $x > 1$. $\log((x + 2)(x - 1)) = \log 4$ donne $x^2 + x - 2 = 4$, soit $x^2 + x - 6 = 0$, de racines $x = 2$ et $x = -3$. Seule $x = 2$ est dans le domaine : $S = \{2\}$.
2. Domaine : $x > 1$ (alors $2x + 1 > 0$ aussi). Comme $1 = \log 10$, l'inéquation s'écrit $\log(2x + 1) \leq \log(10(x - 1))$, soit $2x + 1 \leq 10x - 10$, c'est-à-dire $x \geq \frac{11}{8}$. Avec le domaine : $S = [\frac{11}{8}, +\infty[$.

Équation du second degré en $\log x$

Exercice 3. Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $2(\log x)^2 + \log x - 1 = 0$.

Solution 3.

On pose $X = \log x : 2X^2 + X - 1 = 0$, $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc $X = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ ou $X = \frac{-1-3}{4} = -1$.
 $\log x = \frac{1}{2}$ donne $x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$; $\log x = -1$ donne $x = \frac{1}{10}$. $S = \{\frac{1}{10}, \sqrt{10}\}$.

Ordres de grandeur

Exercice 4.

- Déterminer le nombre de chiffres de 9^{40} .
- Comparer 2^{300} et 3^{200} .

Solution 4.

- $\log 9^{40} = 40 \log 9 = 80 \log 3 \approx 38,2$, donc $10^{38} \leq 9^{40} < 10^{39}$: 9^{40} a 39 chiffres.
- $\log 2^{300} = 300 \log 2 \approx 90,3$ et $\log 3^{200} = 200 \log 3 \approx 95,4$. Donc $3^{200} > 2^{300}$.

Placement à intérêts composés

Exercice 5. Un capital de 15 000 DH est placé à intérêts composés au taux annuel de 3,5%. On donne $\log 1,035 \approx 0,0149$.

- Exprimer le capital C_n acquis après n années.
- Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 25 000 DH ?

Solution 5.

- $C_n = 15\,000 \times 1,035^n$.
- $C_n \geq 25\,000 \iff 1,035^n \geq \frac{5}{3} \iff n \log 1,035 \geq \log 5 - \log 3$. Or $\log 5 - \log 3 = 1 - \log 2 - \log 3 \approx 0,222$, donc $n \geq 0, \frac{222}{0,0149} \approx 14,9$. Le capital dépasse 25 000 DH au bout de 15 ans.