

Exercices type contrôle — Suites numériques et suites financières

Chapitre 4

Suite arithmétique

Exercice 1. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = 11$ et $u_8 = 26$.

1. Déterminer la raison r et le premier terme u_0 .
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.

Solution 1.

1. $u_8 = u_3 + 5r$, donc $26 = 11 + 5r$ et $r = 3$. $u_0 = u_3 - 3r = 11 - 9 = 2$.
2. $u_n = u_0 + nr = 2 + 3n$.
3. La somme de 21 termes consécutifs vaut $S = 21 \times \frac{u_0 + u_{20}}{2} = 21 \times \frac{2 + 62}{2} = 21 \times 32 = 672$.

Suite géométrique

Exercice 2. Soit (v_n) une suite géométrique à termes positifs telle que $v_1 = 6$ et $v_4 = 48$.

1. Déterminer la raison q et le premier terme v_0 .
2. Exprimer v_n en fonction de n .
3. Calculer $S = v_0 + v_1 + \dots + v_9$.

Solution 2.

1. $v_4 = v_1 q^3$, donc $q^3 = \frac{48}{6} = 8$ et $q = 2$. $v_0 = \frac{v_1}{q} = 3$.
2. $v_n = v_0 q^n = 3 \times 2^n$.
3. $S = v_0 \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 3 \times \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 3 \times 1023 = 3069$.

Intérêts simples

Exercice 3. Un capital de 20 000 DH est placé à intérêts simples au taux annuel de 4 %. On note C_n le capital acquis après n années.

1. Calculer C_1 et C_2 .
2. Montrer que (C_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison, puis exprimer C_n en fonction de n .

3. Quel est le capital acquis après 6 ans ? Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 30 000 DH ?

Solution 3.

1. Chaque année, l'intérêt est calculé sur le capital initial : $I = 20\,000 \times 0,04 = 800$ DH. Donc $C_1 = 20\,800$ DH et $C_2 = 21\,600$ DH.
2. $C_{n+1} = C_n + 800$: (C_n) est arithmétique de raison 800 et de premier terme $C_0 = 20\,000$, donc $C_n = 20\,000 + 800n$.
3. $C_6 = 20\,000 + 4\,800 = 24\,800$ DH. $C_n > 30\,000$ équivaut à $800n > 10\,000$, soit $n > 12,5$: à partir de la 13^e année.

Intérêts composés

Exercice 4. Le même capital de 20 000 DH est placé à intérêts composés au taux annuel de 4 %. On note D_n le capital acquis après n années.

1. Montrer que (D_n) est une suite géométrique et exprimer D_n en fonction de n .
2. Calculer le capital acquis après 6 ans (arrondir au centime) et comparer avec le placement à intérêts simples.
3. Au bout de combien d'années le capital initial a-t-il doublé ? (On pourra utiliser $\log 2 \approx 0,3010$ et $\log 1,04 \approx 0,0170$.)

Solution 4.

1. Chaque année, l'intérêt est calculé sur le capital de l'année précédente : $D_{n+1} = D_n + 0,04D_n = 1,04D_n$. (D_n) est géométrique de raison 1,04 et de premier terme 20 000 : $D_n = 20\,000 \times 1,04^n$.
2. $D_6 = 20\,000 \times 1,04^6 \approx 20\,000 \times 1,26532 \approx 25\,306,38$ DH. À intérêts simples, on avait 24 800 DH : les intérêts composés rapportent environ 506 DH de plus sur 6 ans.
3. $D_n \geq 40\,000$ équivaut à $1,04^n \geq 2$, soit $n \log 1,04 \geq \log 2$ (le logarithme décimal est croissant), donc $n \geq \frac{\log 2}{\log 1,04} \approx 0, \frac{3010}{0,0170} \approx 17,7$. Le capital a doublé au bout de 18 ans.

Épargne par versements réguliers

Exercice 5. Chaque 1^{er} janvier, à partir de 2026, une personne verse 3 000 DH sur un compte rémunéré à 3 % par an à intérêts composés.

1. Quelle est la valeur acquise du premier versement au 31 décembre 2026 ? Au 31 décembre 2030 ?
2. Montrer que la valeur acquise V_n de l'ensemble des versements, au 31 décembre de la n^e année, vaut $V_n = 3\,000 \times 1,03 \times \frac{1,03^n - 1}{0,03}$.
3. Calculer V_5 (arrondir au dirham).

Solution 5.

1. Un versement placé k années devient $3\,000 \times 1,03^k$. Au 31 décembre 2026 (1 an) : $3\,000 \times 1,03 = 3\,090$ DH. Au 31 décembre 2030 (5 ans) : $3\,000 \times 1,03^5 \approx 3\,477,82$ DH.
2. Au 31 décembre de la n^{e} année, le k^{e} versement a été placé $n - k + 1$ années. La valeur acquise totale est $V_n = 3\,000(1,03 + 1,03^2 + \dots + 1,03^n)$, somme de n termes d'une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme 1,03 : $V_n = 3\,000 \times 1,03 \times \frac{1,03^n - 1}{1,03 - 1}$.
3. $1,03^5 \approx 1,15927$, donc $V_5 \approx 3\,000 \times 1,03 \times 0,15927 \approx 3\,000 \times 5,4684 \approx 16\,405$ DH.

Monotonie et encadrement

Exercice 6. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

1. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
2. Montrer que $u_n = 2 - \frac{1}{n+1}$ et en déduire que $1 \leq u_n < 2$.
3. Étudier la monotonie de (u_n) .

Solution 6.

1. $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{5}{3}$.
2. $2 - \frac{1}{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} = u_n$. Comme $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$, on obtient $1 \leq 2 - \frac{1}{n+1} < 2$.
3. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$: la suite est strictement croissante (et majorée par 2).