

Exercices type bac — Géométrie dans l'espace

Chapitre 11

Plan défini par trois points, aire et volume

Exercice 1. L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct. On donne $A(1, 2, 0)$, $B(-1, 0, 3)$, $C(2, -1, 1)$ et $D(0, 0, 5)$.

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ et en déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
3. Calculer l'aire du triangle ABC .
4. Calculer la distance du point D au plan (ABC) , puis le volume du tétraèdre $ABCD$.

Solution 1.

1. $\overrightarrow{AB}(-2, -2, 3)$ et $\overrightarrow{AC}(1, -3, 1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (les rapports $-\frac{2}{1}$ et $-\frac{2}{-3}$ différent), donc A , B , C ne sont pas alignés.
2. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = ((-2)(1) - (3)(-3), (3)(1) - (-2)(1), (-2)(-3) - (-2)(1)) = (7, 5, 8)$. Ce vecteur est normal au plan (ABC) , d'où l'équation $7x + 5y + 8z + d = 0$. Avec A : $7 + 10 + d = 0$, donc $d = -17$. $(ABC) : 7x + 5y + 8z - 17 = 0$ (on vérifie que B et C la satisfont).
3. Aire $= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{49 + 25 + 64} = \frac{\sqrt{138}}{2}$.
4. $d(D, (ABC)) = \frac{|7 \times 0 + 5 \times 0 + 8 \times 5 - 17|}{\sqrt{138}} = \frac{23}{\sqrt{138}}$. Volume $= \frac{1}{3} \times \text{Aire} \times d = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{138}}{2} \times \frac{23}{\sqrt{138}} = \frac{23}{6}$.

Sphère et plan

Exercice 2. On considère l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ et le plan $(P) : 2x - y + 2z - 5 = 0$.

1. Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R .
2. Calculer la distance de Ω au plan (P) et en déduire que (P) coupe (S) suivant un cercle dont on déterminera le rayon.
3. Déterminer les coordonnées du centre H de ce cercle.

Solution 2.

1. En complétant les carrés : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 1 + 4 + 9 - 5 = 9$. (S) est la sphère de centre $\Omega(1, -2, 3)$ et de rayon $R = 3$.
2. $d(\Omega, (P)) = \frac{|2 + 2 + 6 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{5}{3}$. Comme $\frac{5}{3} < 3 = R$, le plan coupe la sphère suivant un cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{56}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{3}$.

3. H est le projeté orthogonal de Ω sur $(P) : H = \Omega + t\vec{n}$ avec $\vec{n}(2, -1, 2)$, soit $H(1 + 2t, -2 - t, 3 + 2t)$. $H \in (P) : 2(1 + 2t) - (-2 - t) + 2(3 + 2t) - 5 = 0$, soit $9t + 5 = 0$ et $t = -\frac{5}{9}$.
Donc $H(-\frac{1}{9}, -\frac{13}{9}, \frac{17}{9})$.

Droite, plan et plan tangent

Exercice 3. On donne la droite (D) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2t \\ z=3+2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$, le plan $(Q) : x + 2y - z + 4 = 0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1, -2, 3)$ et de rayon 3.

- Déterminer le point d'intersection de (D) et (Q) .
- Vérifier que le point $M(1, -2, 6)$ appartient à (S) et déterminer une équation du plan tangent à (S) en M .

Solution 3.

- On remplace dans l'équation de $(Q) : (1 + t) + 2(-2t) - (3 + 2t) + 4 = 2 - 5t = 0$, donc $t = \frac{2}{5}$. Le point d'intersection est $I(\frac{7}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{19}{5})$.
- $\Omega M = \sqrt{0 + 0 + 9} = 3 = R$, donc $M \in (S)$. Le plan tangent en M est le plan passant par M et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega M}(0, 0, 3)$: son équation est $3(z - 6) = 0$, soit $z = 6$.