

Exercices type bac — Équations différentielles

Chapitre 10

Équations $y' = a y$ avec condition initiale

Exercice 1.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y$ et déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 2$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ et déterminer la solution g vérifiant $g(1) = e$.

Solution 1.

1. Les solutions de $y' = 3y$ sont les fonctions $x \rightarrow Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$. $f(0) = 2$ donne $C = 2$, donc $f(x) = 2e^{3x}$.
2. $y' + 2y = 0$ s'écrit $y' = -2y$: solutions $x \rightarrow Ce^{-2x}$. $g(1) = e$ donne $Ce^{-2} = e$, soit $C = e^3$, donc $g(x) = e^3 e^{-2x} = e^{3-2x}$.

Équation affine $y' = a y + b$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y - 4$.

1. Déterminer la solution constante de (E) .
2. Résoudre (E) .
3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 5$, puis calculer $f'(0)$.

Solution 2.

1. Une fonction constante $y = c$ vérifie $y' = 0$, donc $0 = 2c - 4$ et $c = 2$.
2. Les solutions de $y' = ay + b$ sont $x \rightarrow Ce^{ax} - \frac{b}{a}$; ici $a = 2$, $b = -4$: $y = Ce^{2x} + 2$, $C \in \mathbb{R}$.
3. $f(0) = 5$ donne $C + 2 = 5$, soit $C = 3$: $f(x) = 3e^{2x} + 2$. Alors $f'(x) = 6e^{2x}$ et $f'(0) = 6$ (on vérifie : $2f(0) - 4 = 10 - 4 = 6$).

Équation harmonique $y'' + \omega^2 y = 0$

Exercice 3. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y = 0$.

1. Donner la forme générale des solutions de (E) .
2. Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.
3. Montrer que $f(x) = \sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4})$ et en déduire le maximum de f .

Solution 3.

1. $\omega^2 = 4$ donc $\omega = 2$: les solutions sont $x \rightarrow A \cos(2x) + B \sin(2x)$, $A, B \in \mathbb{R}$.
2. $f(0) = A = 1$. $f'(x) = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$, donc $f'(0) = 2B = 2$ et $B = 1$. Ainsi $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$.
3. $\sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos(2x) \cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(2x) \sin(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x)) = \cos(2x) + \sin(2x) = f(x)$. Comme $-1 \leq \cos(2x - \frac{\pi}{4}) \leq 1$, le maximum de f vaut $\sqrt{2}$, atteint lorsque $2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$.

Décroissance radioactive

Exercice 4. Le nombre $N(t)$ de noyaux d'un échantillon radioactif vérifie $N'(t) = -\lambda N(t)$ (t en jours, $\lambda > 0$), avec $N(0) = N_0$.

1. Exprimer $N(t)$ en fonction de t , λ et N_0 .
2. La demi-vie T est la durée au bout de laquelle $N(T) = \frac{N_0}{2}$. Montrer que $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$.
3. Pour $T = 8$ jours, au bout de combien de jours reste-t-il 10% des noyaux initiaux ?

Solution 4.

1. $N' = -\lambda N$ est du type $y' = ay$ avec $a = -\lambda$: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.
2. $N(T) = \frac{N_0}{2}$ équivaut à $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$, soit $-\lambda T = -\ln 2$, d'où $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$.
3. On cherche t tel que $N(t) = \frac{N_0}{10}$: $e^{-\lambda t} = \frac{1}{10}$, donc $t = \frac{\ln 10}{\lambda} = \frac{T \ln 10}{\ln 2} = \frac{8 \ln 10}{\ln 2} \approx 26,6$ jours.

Solution particulière et solution générale

Exercice 5. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x e^{-x}$.

1. Vérifier que g est une solution de (E) .
2. Montrer qu'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de $(E') : y' + y = 0$.
3. En déduire toutes les solutions de (E) , puis celle qui vérifie $f(0) = 1$.

Solution 5.

1. $g'(x) = e^{-x} - x e^{-x}$, donc $g'(x) + g(x) = e^{-x} - x e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}$: g est solution de (E) .
2. Posons $h = f - g$. Alors $h' + h = (f' + f) - (g' + g) = (f' + f) - e^{-x}$. Donc $f' + f = e^{-x}$ si et seulement si $h' + h = 0$.
3. Les solutions de (E') sont $x \rightarrow C e^{-x}$. Donc les solutions de (E) sont $f(x) = g(x) + C e^{-x} = (x + C) e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. $f(0) = 1$ donne $C = 1$: $f(x) = (x + 1) e^{-x}$.