

Exercices type bac — Fonctions exponentielles

Chapitre 7

Équations et inéquations

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$;
2. $e^x \leq e^{3-2x}$;
3. $(e^x - 1)(e^x - 4) > 0$.

Solution 1.

1. On pose $X = e^x > 0$: $X^2 - 3X + 2 = 0$, soit $X = 1$ ou $X = 2$. Donc $e^x = 1$ ou $e^x = 2$: $S = \{0, \ln 2\}$.
2. La fonction exponentielle est strictement croissante : $e^x \leq e^{3-2x}$ équivaut à $x \leq 3 - 2x$, soit $x \leq 1$. $S =]-\infty, 1]$.
3. Un produit est strictement positif si ses facteurs sont de même signe. $e^x - 1 > 0$ équivaut à $x > 0$ et $e^x - 4 > 0$ équivaut à $x > \ln 4$. Tableau de signes : le produit est positif pour $x < 0$ (deux facteurs négatifs) et pour $x > \ln 4$. $S =]-\infty, 0[\cup]\ln 4, +\infty[$.

Étude d'une fonction

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 - x)e^x$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Solution 2.

1. En $-\infty$: $f(x) = 2e^x - xe^x$; or $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. En $+\infty$: $2 - x \rightarrow -\infty$ et $e^x \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
2. $f'(x) = -e^x + (2 - x)e^x = (1 - x)e^x$. Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$: f est croissante sur $] -\infty, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$, avec un maximum $f(1) = e$.
3. $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$: tangente $y = x + 2$.
4. $e^x > 0$ pour tout x , donc $f(x) = 0$ équivaut à $2 - x = 0$: $x = 2$.

Inégalité classique $e^x \geq 1 + x$

Exercice 3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de g .
2. En déduire que pour tout réel $x : e^x \geq 1 + x$.
3. En déduire que pour tout $x > -1 : \ln(1 + x) \leq x$.

Solution 3.

1. $g'(x) = e^x - 1$, qui s'annule en 0, est négative sur $] -\infty, 0[$ et positive sur $]0, +\infty[$. g est décroissante sur $] -\infty, 0]$ puis croissante sur $[0, +\infty[$; son minimum est $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.
2. Pour tout x , $g(x) \geq g(0) = 0$, c'est-à-dire $e^x \geq 1 + x$.
3. Pour $x > -1$, $1 + x > 0$ et l'inégalité $1 + x \leq e^x$ donne, par croissance de $\ln : \ln(1 + x) \leq \ln(e^x) = x$.

Fonctions puissances et croissances comparées

Exercice 4.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^x = 8^{x-1}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3^{2x} - 4 \times 3^x + 3 = 0$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$.

Solution 4.

1. $8 = 2^3$, donc $8^{x-1} = 2^{3(x-1)}$. L'équation devient $x = 3x - 3$, soit $x = \frac{3}{2}$. (Autre méthode : $x \ln 2 = (x - 1) \ln 8 = 3(x - 1) \ln 2$.)
2. On pose $X = 3^x > 0 : X^2 - 4X + 3 = 0$, soit $X = 1$ ou $X = 3$. Donc $3^x = 1$ ou $3^x = 3 : S = \{0, 1\}$.
3. $x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$.

Charge d'un condensateur

Exercice 5. La tension aux bornes d'un condensateur en charge est donnée par $u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ pour $t \geq 0$, avec $E = 6$ V et $\tau = 2$ s.

1. Calculer $u(0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$. Interpréter.
2. Calculer $u'(t)$ et en déduire le sens de variation de u .
3. Au bout de combien de temps la tension atteint-elle 95% de sa valeur limite ?

Solution 5.

1. $u(0) = E(1 - 1) = 0$: le condensateur est initialement déchargé. $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = E = 6$ V : la tension tend vers la tension du générateur.

2. $u'(t) = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = 3e^{-\frac{t}{2}} > 0$: u est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
3. $u(t) = 0,95E$ équivaut à $1 - e^{-\frac{t}{2}} = 0,95$, soit $e^{-\frac{t}{2}} = 0,05$, donc $-\frac{t}{2} = \ln(0,05)$ et $t = 2 \ln 20 \approx 6,0$ s (environ 3τ).