

Exercices type bac — Nombres complexes (partie 1)

Chapitre 6

Forme algébrique, conjugué, module

Exercice 1. On donne $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = -1 + 4i$.

1. Écrire sous forme algébrique $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$.
2. Calculer $\overline{z_1}$, $|z_1|$ et $|z_1 z_2|$.

Solution 1.

1. $z_1 + z_2 = 2 + 2i$. $z_1 z_2 = (3 - 2i)(-1 + 4i) = -3 + 12i + 2i - 8i^2 = -3 + 14i + 8 = 5 + 14i$.
 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3-2i)(-1-4i)}{(-1+4i)(-1-4i)} = \frac{-3-12i+2i+8i^2}{1+16} = \frac{-11-10i}{17} = -\frac{11}{17} - \frac{10}{17}i$.
2. $\overline{z_1} = 3 + 2i$; $|z_1| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$; $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = \sqrt{13} \times \sqrt{17} = \sqrt{221}$.

Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$.
2. On note z_1 la solution de partie imaginaire positive. Calculer $|z_1|$, $z_1 + \overline{z_1}$ et $z_1 \overline{z_1}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

Solution 2.

1. $\Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$. Les solutions sont $z = \frac{4 \pm 6i}{2}$, soit $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = 2 - 3i$.
2. $|z_1| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$; $z_1 + \overline{z_1} = 2 \operatorname{Re}(z_1) = 4$; $z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = 13$. On retrouve la somme et le produit des racines.
3. $\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$, donc $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$: $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ensembles de points dans le plan complexe

Exercice 3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $|z - 2 + i| = 3$;
2. $|z - 1| = |z + i|$.

Solution 3.

1. $|z - 2 + i| = |z - (2 - i)| = \Omega M$ où Ω est le point d'affixe $2 - i$. L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega(2, -1)$ et de rayon 3.
2. $|z - 1| = AM$ et $|z + i| = |z - (-i)| = BM$ avec $A(1, 0)$ et $B(0, -1)$. $AM = BM$: l'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AB]$.

Partie réelle et partie imaginaire

Exercice 4. Soit $z = x + iy$ (x, y réels) et $w = z^2 + 2\bar{z}$.

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de w en fonction de x et y .
2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que w soit réel.

Solution 4.

1. $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $2\bar{z} = 2x - 2iy$, donc $w = (x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy - 2y)$: $\operatorname{Re}(w) = x^2 - y^2 + 2x$ et $\operatorname{Im}(w) = 2y(x - 1)$.
2. w est réel si et seulement si $2y(x - 1) = 0$, soit $y = 0$ ou $x = 1$. L'ensemble cherché est la réunion de l'axe des réels et de la droite d'équation $x = 1$.

Racines carrées d'un nombre complexe

Exercice 5.

1. Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 = -5 + 12i$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $2z^2 - 2z + 3 - 6i = 0$.

Solution 5.

1. On pose $z = x + iy$. Alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z|^2 = |z^2|$: $x^2 - y^2 = -5$, $2xy = 12$ et $x^2 + y^2 = |-5 + 12i| = \sqrt{25 + 144} = 13$. En ajoutant et retranchant : $x^2 = 4$ et $y^2 = 9$. Comme $xy = 6 > 0$, x et y ont le même signe : $z = 2 + 3i$ ou $z = -2 - 3i$. Vérification : $(2 + 3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$.
2. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (3 - 6i) = 4 - 24 + 48i = -20 + 48i = 4(-5 + 12i)$. D'après la question 1, une racine carrée de Δ est $\delta = 2(2 + 3i) = 4 + 6i$. Les solutions sont $z = \frac{2 \pm (4 + 6i)}{4}$, soit $z_1 = \frac{6 + 6i}{4} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ et $z_2 = \frac{-2 - 6i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. Vérification : $z_1 + z_2 = 1 = \frac{2}{2}$ et $z_1 z_2 = \frac{3 - 6i}{2}$, conformément aux relations somme et produit des racines.