

Exercices type bac — Suites numériques

Chapitre 3

Monotonie, majoration et limite

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$.

1. Montrer que $u_n = 3 - \frac{5}{n+2}$ et en déduire que (u_n) est majorée par 3.
2. Étudier la monotonie de (u_n) .
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Solution 1.

1. $3 - \frac{5}{n+2} = \frac{3(n+2)-5}{n+2} = \frac{3n+1}{n+2} = u_n$. Comme $\frac{5}{n+2} > 0$, on a $u_n < 3$.
2. $u_{n+1} - u_n = \frac{5}{n+2} - \frac{5}{n+3} = \frac{5}{(n+2)(n+3)} > 0$: la suite est strictement croissante.
3. $\frac{5}{n+2} \rightarrow 0$, donc $\lim u_n = 3$.

Suite arithmético-géométrique

Exercice 2. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

1. On pose $v_n = u_n - 6$. Montrer que (v_n) est géométrique.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n , et calculer $\lim u_n$.
3. Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Solution 2.

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -5$.
2. $v_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc $u_n = 6 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ et $\lim u_n = 6$.
3. $S_n = \sum_{k=0}^n (6 + v_k) = 6(n+1) + v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 6(n+1) - 10\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Théorème des gendarmes et limites usuelles

Exercice 3. Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{n + \cos n}{n+1}$;
2. $v_n = \frac{\sin n}{n}$ (pour $n \geq 1$) ;
3. $w_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n}$.

Solution 3.

1. $-1 \leq \cos n \leq 1$ donne $\frac{n-1}{n+1} \leq u_n \leq 1$; comme $\frac{n-1}{n+1} \rightarrow 1$, le théorème des gendarmes donne $\lim u_n = 1$.
2. $|v_n| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$, donc $\lim v_n = 0$.
3. $w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$ car $0 < \frac{2}{3} < 1$: $\lim w_n = 1$.

Suite récurrente : convergence monotone

Exercice 4. Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout n : $0 \leq u_n \leq 3$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Solution 4.

1. Initialisation : $u_0 = 0 \in [0, 3]$. Hérédité : si $0 \leq u_n \leq 3$, alors $6 \leq u_n + 6 \leq 9$, donc $\sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq 3$, en particulier $0 \leq u_{n+1} \leq 3$.
2. Comme $u_n \geq 0$: $u_{n+1} \geq u_n \iff u_n + 6 \geq u_n^2 \iff u_n^2 - u_n - 6 \leq 0 \iff (u_n - 3)(u_n + 2) \leq 0$, vrai car $0 \leq u_n \leq 3$.
3. Croissante et majorée par 3, la suite converge vers une limite $L \in [0, 3]$. La fonction $x \rightarrow \sqrt{x+6}$ étant continue, $L = \sqrt{L+6}$, soit $L^2 - L - 6 = 0$, d'où $L = 3$ (la racine -2 est exclue).

Suites adjacentes

Exercice 5. Soient (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour tout n : $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$.

1. Montrer que $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{4}$ et en déduire $v_n - u_n$ en fonction de n .
2. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
3. En déduire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. Montrer que la suite $(u_n + 2v_n)$ est constante et déterminer la limite commune de (u_n) et (v_n) .

Solution 5.

1. $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_{n+1}}{2} = \frac{v_n - \frac{u_n + v_n}{2}}{2} = \frac{v_n - u_n}{4}$. La suite $(v_n - u_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$: $v_n - u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$.
2. $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{2} = -\frac{v_n - u_n}{4} < 0$.
3. (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $v_n - u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \rightarrow 0$: les suites sont adjacentes, donc convergent vers une même limite L .
4. $u_{n+1} + 2v_{n+1} = u_{n+1} + u_{n+1} + v_n = 2u_{n+1} + v_n = u_n + v_n + v_n = u_n + 2v_n$: la suite est constante, égale à $u_0 + 2v_0 = 5$. En passant à la limite, $3L = 5$, donc $L = \frac{5}{3}$.