

Exercices type bac — Limites et continuité

Chapitre 1

Calculs de limites

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5}$;
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$;
4. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2}$.

Solution 1.

1. En factorisant par x^2 : $\frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{5}{x^2}} \rightarrow 2$.
2. Forme indéterminée $\infty - \infty$. On multiplie par la quantité conjuguée : $\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \rightarrow 0$.
3. Forme $\frac{0}{0}$. Avec la quantité conjuguée : $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{(1+x) - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$.
4. Le numérateur tend vers $3 > 0$ et le dénominateur vers 0^+ : la limite est $+\infty$.

Théorème des gendarmes

Exercice 2.

1. Soit $f(x) = \frac{2x + \sin x}{x}$ pour $x > 0$. Encadrer $f(x)$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solution 2.

1. Pour $x > 0$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donne $\frac{2x-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x}$, soit $2 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x}$. Les deux bornes tendent vers 2, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ (théorème des gendarmes).
2. Pour $x \neq 0$, $|x^2 \cos(\frac{1}{x})| \leq x^2$ car $|\cos(\frac{1}{x})| \leq 1$. Comme $x^2 \rightarrow 0$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Continuité et prolongement par continuité

Exercice 3.

1. Soit $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ pour $x \neq 2$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 2 et préciser le prolongement.

2. Soit $g(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ pour $x > -4$, $x \neq 0$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ et conclure.
3. Soit h définie par $h(x) = x^2 + a$ si $x \leq 1$ et $h(x) = 3x - 1$ si $x > 1$. Déterminer a pour que h soit continue sur $\mathbb{R}$.

Solution 3.

1. Pour $x \neq 2$, $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$: f est prolongeable par continuité en 2 en posant $f(2) = 4$ (le prolongement est $x \rightarrow x + 2$).
2. $g(x) = \frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} \rightarrow \frac{1}{4}$. g est prolongeable par continuité en 0 avec $g(0) = \frac{1}{4}$.
3. Sur chaque intervalle, h est polynomiale donc continue. En 1 : $h(1) = 1 + a$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = 2$. h est continue en 1 si et seulement si $1 + a = 2$, soit $a = 1$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 4. Soit $f(x) = x^3 + x - 3$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1, 2]$.
2. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

Solution 4.

1. f est continue (polynôme) et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 7 > 0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires (version stricte monotonie), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1, 2[$.
2. $f(1,2) = 1,728 + 1,2 - 3 = -0,072 < 0$ et $f(1,3) = 2,197 + 1,3 - 3 = 0,497 > 0$, donc $1,2 < \alpha < 1,3$.

Image d'un intervalle et limite d'une composée

Exercice 5.

1. Soit $f(x) = x^2 - 2x$. Déterminer $f([0, 3])$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{2x-3}}$.

Solution 5.

1. f est continue sur $[0, 3]$ et $f'(x) = 2x - 2$: f décroît sur $[0, 1]$ puis croît sur $[1, 3]$, avec $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(3) = 3$. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment : $f([0, 3]) = [-1, 3]$.
2. $\frac{x+1}{2x-3} \rightarrow \frac{1}{2}$ en $+\infty$, et la fonction racine carrée est continue en $\frac{1}{2}$, donc la limite vaut $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.