

Examen national : Mathématiques

Session normale 2025 (épreuve officielle NS 24F)

Durée : 4 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

L'épreuve comporte quatre exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat. Barème : 10 + 3,5 + 3 + 3,5 points. L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

Analyse

Exercice 1 (10 points). On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+e}$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère **orthogonal** $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie I.

- (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(1-x) = f(x)$. (0,25 pt)
 (b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,25 pt)
 (c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,5 pt)
 (d) Interpréter graphiquement les deux résultats obtenus. (0,5 pt)
- (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = f(x) \frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$. (0,5 pt)
 (b) Donner les variations de f puis en déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 0 < f(x) < \frac{1}{2}$. (1 pt)
- Représenter graphiquement la courbe (Γ) . (0,5 pt)
 (On prendra $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$, $\|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$ et $\frac{1}{2\sqrt{e}} \simeq 0,30$ et $\frac{1}{1+e} \simeq 0,27$.)
- (a) Montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$. (0,25 pt)
- (a) En effectuant le changement de variables $t = e^x$, montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e}$$

(0,25 pt)

(b) Montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{e}} (\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4})$. (0,5 pt)

(c) En déduire l'aire, en cm^2 , du domaine plan délimité par (Γ) , les droites d'équations respectives : $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$. (0,25 pt)

Partie II. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in]0; \frac{1}{2}[$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$.

- En utilisant le résultat de la question I.2.(a), montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; |f'(x)| \leq f(x)$. (0,5 pt)
- (a) Montrer que : $(\forall x \in [0; \frac{1}{2}]) ; 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$. (0,5 pt)
 (b) Montrer que la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)
 (c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$. (0,5 pt)
- (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \frac{1}{2}$. (0,5 pt)
 (b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$. (0,5 pt)

- (c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. (0,5 pt)
 (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α . (0,25 pt)

Partie III. On considère la suite numérique $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}$$

- (a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. (0,25 pt)
 (b) Montrer que : $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$. (0,5 pt)
 (On pourra effectuer le changement de variables $t = 1 - x$.)
- Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite. (0,5 pt)

Nombres complexes

Exercice 2 (3.5 points). Soit $\alpha \in [0; 2\pi[$. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha} (1 + 2i)z + i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha} = 0$$

Partie I.

- (a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_α) est : $\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha} (1 - 2i))^2$. (0,25 pt)
 (b) En déduire les deux solutions a et b de l'équation (E_α) avec $|a| < |b|$. (0,5 pt)
- Vérifier que $\frac{b}{a}$ est un imaginaire pur. (0,25 pt)

Partie II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note par $M(z)$ le point d'affixe le nombre complexe z . On pose $\frac{b}{a} = \lambda i$ avec $\lambda = \text{Im}\left(\frac{b}{a}\right)$.

- On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $H(h)$ avec $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
 (a) Montrer que : $\frac{h-a}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$ puis en déduire que les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires. (0,5 pt)
 (b) Montrer que : $\frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{\lambda^2+1}$ puis en déduire que les points H , A et B sont alignés. (0,5 pt)
- Soient $I(m)$ le milieu du segment $[OH]$ et $J(n)$ le milieu du segment $[HB]$.
 (a) Montrer que : $\frac{n}{m-a} = -\lambda i$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que les droites (OJ) et (AI) sont perpendiculaires et que $OJ = |\lambda| AI$. (0,5 pt)
 (c) Soit K le point d'intersection des droites (OJ) et (AI) . Montrer que les points K , I , H et J sont cocycliques. (0,25 pt)
 (d) Montrer que les droites (IJ) et (OA) sont perpendiculaires. (0,25 pt)

Arithmétique

Exercice 3 (3 points). Soient p un nombre premier impair et a un entier premier avec p .

- Montrer que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p]$. (0,5 pt)
- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $ax^2 \equiv 1[p]$. Soit x_0 une solution de cette équation.
 (a) Montrer que : $x_0^{p-1} \equiv 1[p]$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que : $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$. (0,25 pt)

3. Soit n un entier naturel non nul.
- (a) Montrer que si p divise $2^{2n+1} - 1$ alors $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$. (0,5 pt)
 - (b) En déduire que l'équation $(E) : 11x + (2^{2n+1} - 1)y = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$. (0,5 pt)
4. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(F) : x^2 + 5x + 2 \equiv 0[11]$.
- (a) Montrer que : $(F) \iff 2(2x + 5)^2 \equiv 1[11]$. (0,25 pt)
 - (b) En déduire que l'équation (F) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$. (0,5 pt)

Structures algébriques

Exercice 4 (3.5 points). On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $E = \{M(x) = I + xA \mid x \in \mathbb{R}\}$.

1. (a) Vérifier que : $A^2 = -2A$. (0,25 pt)
 (b) En déduire que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x) \times M(y) = M(x + y - 2xy)$. (0,25 pt)
2. (a) Calculer $M(\frac{1}{2}) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (0,25 pt)
 (b) En déduire que la matrice $M(\frac{1}{2})$ n'est pas inversible dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$. (0,25 pt)
3. Montrer que : $E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}$ est stable pour la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. (0,25 pt)
 (On pourra utiliser l'identité : $(x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2}) = \frac{-1}{2}(x + y - 2xy - \frac{1}{2})$.)
4. Montrer que : $(E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}, \times)$ est un groupe commutatif. (1 pt)
5. On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad M(x)TM(y) = M\left(x + y - \frac{1}{2}\right)$$

et on considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers E par : $\forall x \in \mathbb{R} ; \varphi(x) = M(\frac{1-x}{2})$.

- (a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (E, T) et que $\varphi(\mathbb{R}) = E$. (0,5 pt)
 - (b) En déduire que (E, T) est un groupe commutatif. (0,25 pt)
6. Montrer que $(E, T, \times)$ est un corps commutatif. (0,5 pt)