

Examen national : Corrigé

Session normale 2025 (épreuve officielle NS 24F)

Analyse

Solution 1.

Partie I.

1. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, en multipliant numérateur et dénominateur par $e^{2x-1} > 0$:

$$f(1-x) = \frac{e^{1-x}}{e^{2-2x} + e} = \frac{e^{1-x} e^{2x-1}}{e^{2-2x} e^{2x-1} + e \times e^{2x-1}} = \frac{e^x}{e + e^{2x}} = f(x).$$

(b) Pour tout x , les points d'abscisses x et $1-x$ de (Γ) ont la même ordonnée et sont symétriques par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$: la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (Γ) .

(c) Quand $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$ et $e^{2x} \rightarrow 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0}{0+e} = 0$. Comme $f(x) = f(1-x)$ et que $1-x \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} f(X) = 0$.

(d) La droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote horizontale à (Γ) en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonctions dérivables, dénominateur non nul) et

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} + e) - e^x \times 2e^{2x}}{(e^{2x} + e)^2} = \frac{e^x(e - e^{2x})}{(e^{2x} + e)^2} = f(x) \times \frac{e - e^{2x}}{e + e^{2x}}.$$

En divisant numérateur et dénominateur de la dernière fraction par e : $f'(x) = f(x) \frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$.

(b) $f(x) > 0$ et $1 + e^{2x-1} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $1 - e^{2x-1}$, qui est positif si et seulement si $2x - 1 < 0$, soit $x < \frac{1}{2}$. Donc f est strictement croissante sur $] -\infty, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$; elle admet un maximum en $\frac{1}{2}$: $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{e}}{e+e} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{e}} < \frac{1}{2}$ (car $2\sqrt{e} > 2$), et $f(x) > 0$ comme quotient de deux nombres strictement positifs : $0 < f(x) < \frac{1}{2}$.

3. [Figure : repère orthogonal, 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée. La courbe est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$, passe par le sommet $(\frac{1}{2}; 0,30)$ (maximum $\frac{1}{2\sqrt{e}}$), par les points $(0; 0,27)$ et $(1; 0,27)$ (car $f(0) = f(1) = \frac{1}{1+e}$), croît sur $] -\infty, \frac{1}{2}]$, décroît sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ et admet l'axe des abscisses pour asymptote des deux côtés, en restant strictement au-dessus.]
4. (a) Dans $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$, posons $t = 1 - x$ ($x = 1 - t$, $dx = -dt$; $x = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{1}{2}$, $x = 1 \rightarrow t = 0$) :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^0 f(1-t)(-dt) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(1-t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$$

d'après I.1.(a). Donc $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$.

(b) Par la relation de Chasles : $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

5. (a) Posons $t = e^x : dt = e^x dx$, $x = 0 \rightarrow t = 1$, $x = \frac{1}{2} \rightarrow t = \sqrt{e}$, et $f(x) dx = \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + e} = \frac{dt}{t^2 + e}$.

Donc $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e}$.

(b) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{e}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{e}}\right)$ a pour dérivée $\frac{1}{\sqrt{e}} \times \frac{1}{\sqrt{e}} \times \frac{1}{1 + \frac{t^2}{e}} = \frac{1}{e} \times \frac{e}{e + t^2} = \frac{1}{t^2 + e}$. Donc

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e} = \frac{1}{\sqrt{e}} \left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{e}}\right) \right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \right).$$

Or pour $u > 0$, $\arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(u)$: en effet $\frac{\pi}{2} - \arctan(u) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(u)\right) = \frac{1}{\tan(\arctan(u))} = \frac{1}{u}$. Avec $u = \sqrt{e}$: $\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \arctan(\sqrt{e}) = \arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4}$. Donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4} \right).$$

(c) Comme $f > 0$ sur $[0, 1]$, l'aire cherchée vaut, en unités d'aire, $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{2}{\sqrt{e}} \left(\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4} \right)$ (question 4.(b)). L'unité d'aire vaut $1 \times 2 = 2 \text{ cm}^2$, donc l'aire est

$$\mathcal{A} = \frac{4}{\sqrt{e}} \left(\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4} \right) \text{cm}^2 \approx 0,58 \text{cm}^2.$$

Partie II.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $q = e^{2x-1} > 0$. Alors $|1 - q| \leq 1 + q$ (car $-1 - q \leq 1 - q \leq 1 + q$), donc $\left| \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}} \right| \leq 1$. D'après I.2.(a) et $f(x) > 0 : |f'(x)| = f(x) \left| \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}} \right| \leq f(x)$.

2. (a) Pour $x \in [0; \frac{1}{2}] : x \leq \frac{1}{2}$ donne $e^{2x-1} \leq 1$, donc $f'(x) \geq 0$ (I.2.(b)) ; et $f'(x) \leq |f'(x)| \leq f(x) < \frac{1}{2}$ (question 1 et I.2.(b)). Donc $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$.

(b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f'(x) - 1 \leq |f'(x)| - 1 \leq f(x) - 1 < \frac{1}{2} - 1 < 0$. Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

(c) g est continue et strictement décroissante sur $[0; \frac{1}{2}]$, $g(0) = f(0) = \frac{1}{1+e} > 0$ et $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{2} < 0$ (car $\frac{1}{2\sqrt{e}} < \frac{1}{2}$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$; elle est unique car g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc il existe un unique $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

3. (a) **Initialisation** : $u_0 \in]0; \frac{1}{2}[$. **Hérédité** : si $0 < u_n < \frac{1}{2}$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$ d'après I.2.(b) (vrai pour tout réel). **Conclusion** : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. f est dérivable sur $[0; \frac{1}{2}]$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ sur cet intervalle (question 2.(a)). u_n et α appartiennent à $[0; \frac{1}{2}]$, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis : $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$, c'est-à-dire $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ (car $f(\alpha) = \alpha$).

(c) **Initialisation** : u_0 et α sont dans $]0; \frac{1}{2}[$, donc $|u_0 - \alpha| < \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$. **Hérédité** : si $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, alors d'après (b) $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$. **Conclusion** : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$: la suite (u_n) converge vers α .

Partie III.

1. (a) Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, en multipliant numérateur et dénominateur par $e^{\frac{k}{n}}$:

$$\frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}} = \frac{ke^{\frac{k}{n}}}{e^{2\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n} + \frac{k}{n}}} = \frac{ke^{\frac{k}{n}}}{e^{2\frac{k}{n}} + e} = kf\left(\frac{k}{n}\right) = n \times \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Donc $S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n n \times \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(b) Posons $t = 1 - x$ ($dx = -dt$, $x = 0 \rightarrow t = 1$, $x = 1 \rightarrow t = 0$) :

$$\int_0^1 x f(x) dx = \int_1^0 (1-t) f(1-t) (-dt) = \int_0^1 (1-t) f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 t f(t) dt$$

(en utilisant $f(1-t) = f(t)$). Donc $2 \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ d'après I.4.

(b), d'où $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

2. Écrivons $S_n = \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $h(x) = x f(x)$, continue sur $[0, 1]$. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h\left(\frac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann de h sur $[0, 1]$, donc converge vers $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{e}} (\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4})$ (questions 1.(b) et I.5.(b)). Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, la suite (S_n) est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4} \right).$$

Nombres complexes

Solution 2.

Partie I.

1. (a) $\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha} (1+2i))^2 - 4i 2^{2\alpha+1} e^{2i\alpha} = 2^{2\alpha} e^{2i\alpha} ((1+2i)^2 - 8i) = 2^{2\alpha} e^{2i\alpha} (1+4i-4-8i) = 2^{2\alpha} e^{2i\alpha} (-3-4i)$. Or $(1-2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$, donc $\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha} (1-2i))^2$.
 (b) Une racine carrée de Δ_α est $\delta = 2^\alpha e^{i\alpha} (1-2i)$, donc les solutions sont

$$z' = \frac{2^\alpha e^{i\alpha} (1+2i) + 2^\alpha e^{i\alpha} (1-2i)}{2} = 2^\alpha e^{i\alpha}, \quad z'' = \frac{2^\alpha e^{i\alpha} (1+2i) - 2^\alpha e^{i\alpha} (1-2i)}{2} = 2^\alpha e^{i\alpha} \times 2i = 2^{\alpha+1} i e^{i\alpha}.$$

$|z'| = 2^\alpha < 2^{\alpha+1} = |z''|$, donc $a = 2^\alpha e^{i\alpha}$ et $b = 2^{\alpha+1} i e^{i\alpha}$.

2. $\frac{b}{a} = \frac{2^{\alpha+1} i e^{i\alpha}}{2^\alpha e^{i\alpha}} = 2i$, qui est un imaginaire pur (donc $\lambda = 2$).

Partie II.

1. (a) $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$, donc $h = \frac{ab}{a+b}$ (avec $a+b \neq 0$ car $\frac{b}{a} = \lambda i \neq -1$). Alors

$$\frac{h}{b-a} = \frac{ab}{(a+b)(b-a)} = \frac{ab}{b^2-a^2} = \frac{\frac{b}{a}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2-1} = \frac{\lambda i}{-\lambda^2-1} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i,$$

en divisant numérateur et dénominateur par a^2 . Ce quotient $\frac{h-a}{b-a}$ est un imaginaire pur non nul ($\lambda = 2 \neq 0$), donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OH}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$: les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires.

(b) $h-a = \frac{ab}{a+b} - a = \frac{ab-a^2-ab}{a+b} = \frac{-a^2}{a+b}$, donc

$$\frac{h-a}{b-a} = \frac{-a^2}{(a+b)(b-a)} = \frac{-a^2}{b^2-a^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{1+\lambda^2}.$$

Ce quotient est un réel, donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires : les points H , A et B sont alignés.

2. (a) $m = \frac{h}{2}$ et $n = \frac{h+b}{2}$, donc $\frac{n}{m-a} = \frac{h+b}{h-2a}$. Avec $h = \frac{ab}{a+b}$:

$$h+b = \frac{ab+ab+b^2}{a+b} = \frac{b(2a+b)}{a+b}, \quad h-2a = \frac{ab-2a^2-2ab}{a+b} = \frac{-a(2a+b)}{a+b}.$$

Comme $2a + b = a(2 + \lambda i) \neq 0$: $\frac{n}{m-a} = \frac{b(2a+b)}{-a(2a+b)} = -\frac{b}{a} = -\lambda i$.

(b) $\frac{n-0}{m-a} = -\lambda i$ est un imaginaire pur non nul, donc $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$: les droites (OJ) et (AI) sont perpendiculaires. De plus $\frac{|n|}{|m-a|} = |-\lambda i| = |\lambda|$, soit $OJ = |\lambda|AI$.

3. (c) $K \in (OJ) \cap (AI)$, donc $(KJ) = (OJ)$ et $(KI) = (AI)$ sont perpendiculaires (question 2.(b)) : le triangle KIJ est rectangle en K . D'autre part $I \in (OH)$ et $J \in (HB) = (AB)$ (les points H, A, B étant alignés), et $(OH) \perp (AB)$ (question 1.(a)) : le triangle HIJ est rectangle en H . Les points K et H voient donc le segment $[IJ]$ sous un angle droit : ils appartiennent tous deux au cercle de diamètre $[IJ]$. Donc K, I, H et J sont cocycliques.
- (d) Dans le triangle OHB , I est le milieu de $[OH]$ et J le milieu de $[HB]$; d'après le théorème des milieux, $(IJ) \parallel (OB)$. Or $\frac{b}{a} = \lambda i$ est un imaginaire pur non nul, donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $(OB) \perp (OA)$. Par conséquent $(IJ) \perp (OA)$.

Arithmétique

Solution 3.

1. p est premier et ne divise pas a (car $a \wedge p = 1$), donc d'après le petit théorème de Fermat, $a^{p-1} \equiv 1[p]$. Comme p est impair, $\frac{p-1}{2}$ est un entier et

$$a^{p-1} - 1 = \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right).$$

p divise ce produit ; p étant premier, il divise l'un des facteurs (lemme d'Euclide) : $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p]$.

2. (a) $ax_0^2 \equiv 1[p]$. Si p divisait x_0 , on aurait $ax_0^2 \equiv 0[p]$, donc $1 \equiv 0[p]$, impossible car $p \geq 3$. Donc p ne divise pas x_0 , et x_0 est premier avec le nombre premier p : le petit théorème de Fermat donne $x_0^{p-1} \equiv 1[p]$.
- (b) En élevant $ax_0^2 \equiv 1[p]$ à la puissance $\frac{p-1}{2}$: $a^{\frac{p-1}{2}} x_0^{p-1} \equiv 1[p]$. Or $x_0^{p-1} \equiv 1[p]$ d'après (a), donc $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$.
3. (a) Supposons que p divise $2^{2n+1} - 1$, c'est-à-dire $2^{2n+1} \equiv 1[p]$, soit $2 \times (2^n)^2 \equiv 1[p]$. Ainsi $x_0 = 2^n$ est une solution de l'équation $2x^2 \equiv 1[p]$, et 2 est premier avec p (car p est un premier impair). D'après la question 2.(b) appliquée avec $a = 2$: $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$.
- (b) Montrons que 11 et $2^{2n+1} - 1$ sont premiers entre eux. Si 11 divisait $2^{2n+1} - 1$, la question 3.(a) avec $p = 11$ (premier impair) donnerait $2^5 \equiv 1[11]$. Or $2^5 = 32 = 2 \times 11 + 10 \equiv 10 \equiv -1[11]$, et $-1 \not\equiv 1[11]$: contradiction. Donc 11 ne divise pas $2^{2n+1} - 1$; 11 étant premier, $11 \wedge (2^{2n+1} - 1) = 1$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $11x + (2^{2n+1} - 1)y = 1$: l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.
4. (a) $2(2x+5)^2 = 2(4x^2 + 20x + 25) = 8x^2 + 40x + 50 = 8(x^2 + 5x + 2) + 34$, et $34 = 3 \times 11 + 1 \equiv 1[11]$. Donc $2(2x+5)^2 \equiv 8(x^2 + 5x + 2) + 1[11]$ et

$$2(2x+5)^2 \equiv 1[11] \iff 8(x^2 + 5x + 2) \equiv 0[11] \iff x^2 + 5x + 2 \equiv 0[11],$$

la dernière équivalence venant de $8 \wedge 11 = 1$ (théorème de Gauss pour le sens direct). Donc $(F) \iff 2(2x+5)^2 \equiv 1[11]$.

(b) Supposons que $x \in \mathbb{Z}$ soit solution de (F). Alors $x_0 = 2x + 5$ vérifie $2x_0^2 \equiv 1[11]$, avec $2 \wedge 11 = 1$ et 11 premier impair. La question 2.(b) (avec $a = 2$, $p = 11$) donne $2^5 \equiv 1[11]$, ce qui est faux puisque $2^5 \equiv -1[11]$. Donc l'équation (F) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Structures algébriques

Solution 4.

$$1. (a) A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = -2A.$$

(b) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, en développant (le produit matriciel est distributif par rapport à l'addition et I est l'unité) :

$$M(x) \times M(y) = (I + xA)(I + yA) = I + yA + xA + xyA^2 = I + (x + y)A - 2xyA = I + (x + y - 2xy)A = M(x + y - 2xy)$$

$$2. (a) M\left(\frac{1}{2}\right) = I + \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$$M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

(b) Si $M\left(\frac{1}{2}\right)$ était inversible, d'inverse N , on aurait en multipliant à gauche par N : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N \times O = O$, ce qui est faux. Donc $M\left(\frac{1}{2}\right)$ n'est pas inversible dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

3. Remarquons que $M(x) = M(y) \iff (x - y)A = O \iff x = y$ (car $A \neq O$), donc $E \setminus \{M\left(\frac{1}{2}\right)\} = \{M(x) / x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}\}$. Soient $M(x)$ et $M(y)$ dans $E \setminus \{M\left(\frac{1}{2}\right)\}$, c'est-à-dire $x \neq \frac{1}{2}$ et $y \neq \frac{1}{2}$. Alors $M(x) \times M(y) = M(x + y - 2xy)$ et, d'après l'identité $(x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(x + y - 2xy - \frac{1}{2})$, le membre de gauche étant non nul, $x + y - 2xy \neq \frac{1}{2}$. Donc $M(x) \times M(y) \in E \setminus \{M\left(\frac{1}{2}\right)\}$: cet ensemble est stable pour la multiplication.

4. Notons $E^* = E \setminus \{M\left(\frac{1}{2}\right)\}$. **Loi interne** : question 3. **Associativité** : la multiplication est associative dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. **Commutativité** : $M(x) \times M(y) = M(x + y - 2xy) = M(y + x - 2yx) = M(y) \times M(x)$. **Élément neutre** : $I = M(0) \in E^*$ (car $0 \neq \frac{1}{2}$) et I est l'unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. **Symétrique** : soit $M(x) \in E^*$. Cherchons y tel que $M(x) \times M(y) = M(0)$, soit $x + y - 2xy = 0$, soit $y(1 - 2x) = -x$, soit $y = \frac{x}{2x-1}$ (possible car $x \neq \frac{1}{2}$). De plus $y \neq \frac{1}{2}$: sinon $2x = 2x - 1$, absurde. Donc $M\left(\frac{x}{2x-1}\right) \in E^*$ et $M(x) \times M\left(\frac{x}{2x-1}\right) = M\left(\frac{x}{2x-1}\right) \times M(x) = M(0) = I$. Conclusion : $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif.

5. (a) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi(x)T\varphi(y) = M\left(\frac{1-x}{2}\right)TM\left(\frac{1-y}{2}\right) = M\left(\frac{1-x}{2} + \frac{1-y}{2} - \frac{1}{2}\right) = M\left(\frac{1-(x+y)}{2}\right) = \varphi(x+y).$$

Donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (E, T) . De plus $\varphi(\mathbb{R}) \subset E$ et, pour tout $M(t) \in E$, $x = 1 - 2t \in \mathbb{R}$ vérifie $\varphi(x) = M\left(\frac{1-1+2t}{2}\right) = M(t)$; donc $\varphi(\mathbb{R}) = E$.

(b) $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif et φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (E, T) ; l'image $\varphi(\mathbb{R}) = E$ d'un groupe commutatif par un homomorphisme est un groupe commutatif. Donc (E, T) est un groupe commutatif, d'élément neutre $\varphi(0) = M\left(\frac{1}{2}\right)$, le symétrique de $M(t) = \varphi(1 - 2t)$ étant $\varphi(2t - 1) = M(1 - t)$.

6. (E, T) est un groupe commutatif d'élément neutre $M\left(\frac{1}{2}\right)$ (question 5). La multiplication est une loi interne dans E (question 1.(b) : $M(x) \times M(y) = M(x + y - 2xy) \in E$), associative et commutative (question 4), d'élément neutre $I = M(0) \in E$, avec $M(0) \neq M\left(\frac{1}{2}\right)$. Distributivité de $\times$ par rapport à T : pour x, y, z réels,

$$M(x) \times (M(y)TM(z)) = M(x) \times M\left(y + z - \frac{1}{2}\right) = M\left(x + y + z - \frac{1}{2} - 2x\left(y + z - \frac{1}{2}\right)\right) = M\left(2x + y + z - 2xy - 2xz - \frac{1}{2}\right)$$

$$(M(x) \times M(y))T(M(x) \times M(z)) = M(x + y - 2xy)TM(x + z - 2xz) = M\left(2x + y + z - 2xy - 2xz - \frac{1}{2}\right).$$

Les deux sont égaux, et la distributivité à droite s'en déduit par commutativité de $\times$. Donc $(E, T, \times)$ est un anneau commutatif unitaire. Enfin, tout élément de E autre que le neutre $M(\frac{1}{2})$ de la première loi est inversible pour $\times$ (question 4). Donc $(E, T, \times)$ est un corps commutatif.