

Examen national : Mathématiques

Session normale 2025 (épreuve officielle NS 26F)

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Vous devez justifier les résultats. Barème : 4 + 1 + 3 + 12 points.

Suites numériques

Exercice 1 (4 points). On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
2. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -1$. (1 pt)
3. On pose : $v_n = \frac{1}{1+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 - (a) Calculer v_0 . (0,25 pt)
 - (b) Calculer $v_{n+1} - v_n$ puis en déduire que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{2}{3}$. (1 pt)
 - (c) Exprimer v_n en fonction de n . (0,5 pt)
 - (d) En déduire que $u_n = \frac{-2n+2}{2n+1}$. (0,5 pt)
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,25 pt)

Variable aléatoire

Exercice 2 (1 points). Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous.

[Tableau : $x_i : 0, 1, 2$; $p(X = x_i) : \dots, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}$.]

1. Déterminer $p(X = 0)$. (0,5 pt)
2. Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X . (0,5 pt)

Calcul des probabilités

Exercice 3 (3 points). Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

On considère les trois événements suivants :

A : « Les deux boules tirées sont rouges »

B : « La première boule tirée est noire et la deuxième est rouge »

C : « L'une des boules tirées est noire et l'autre est rouge »

1. Montrer que : $p(A) = \frac{2}{5}$. (0,75 pt)
2. Montrer que : $p(B) = \frac{4}{15}$. (0,75 pt)
3. Montrer que : $p(C) = \frac{8}{15}$. (0,75 pt)
4. Les événements B et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse. (0,75 pt)

Étude d'une fonction numérique et calcul intégral

Exercice 4 (12 points). On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Justifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, puis donner une interprétation géométrique du résultat. (1 pt)
2. (a) Vérifier que $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
(b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, puis donner une interprétation géométrique du résultat. (1 pt)
3. (a) Montrer que $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$. (1 pt)
(b) Donner le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
(c) Dresser le tableau de variations de f . (1 pt)
4. (a) Calculer $f(-\ln 3)$. (0,5 pt)
(b) Déterminer l'image de l'intervalle $[-\ln 3, 0]$ par la fonction f . (0,5 pt)
5. Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$. (1 pt)
6. (a) Montrer que $f''(x) = \frac{4e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}$. (1 pt)
(b) En déduire que (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées. (1,5 pt)
7. Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = 4 \ln(e^x + 1) - x$.
(a) Montrer que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (1 pt)
(b) Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que l'aire du domaine limité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$ (la partie hachurée) est égale à $(4 \ln 3 - 5 \ln 2)$ u.a. (1,5 pt)

[Figure : dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C_f) est croissante, passe par le point $(0, 1)$, coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\ln 3 \approx -1,1$ et se rapproche des droites $y = -1$ en $-\infty$ et $y = 3$ en $+\infty$. La partie hachurée est le domaine situé sous (C_f) , au-dessus de l'axe des abscisses, entre l'axe des ordonnées ($x = 0$) et la droite d'équation $x = \ln 2$.]