

Examen national : Corrigé

Session normale 2025 (épreuve officielle NS 26F)

Suites numériques

Solution 1.

- $u_1 = \frac{u_0-2}{2u_0+5} = \frac{2-2}{4+5} = \frac{0}{9} = 0$ et $u_2 = \frac{u_1-2}{2u_1+5} = \frac{0-2}{0+5} = -\frac{2}{5}$. Donc $u_1 = 0$ et $u_2 = -\frac{2}{5}$.
- Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -1$.

Initialisation : $u_0 = 2 > -1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > -1$. Alors $u_{n+1} + 1 = \frac{u_n-2}{2u_n+5} + 1 = \frac{u_n-2+2u_n+5}{2u_n+5} = \frac{3u_n+3}{2u_n+5} = \frac{3(u_n+1)}{2u_n+5}$. Comme $u_n > -1$: $u_n + 1 > 0$ et $2u_n + 5 > -2 + 5 = 3 > 0$, donc $u_{n+1} + 1 > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > -1$.

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > -1$ (en particulier $1 + u_n \neq 0$, ce qui justifie la définition de v_n à la question 3).

- $v_0 = \frac{1}{1+u_0} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$.
 - D'après le calcul de la question 2, $1 + u_{n+1} = \frac{3(u_n+1)}{2u_n+5}$, donc $v_{n+1} = \frac{1}{1+u_{n+1}} = \frac{2u_n+5}{3(u_n+1)}$.
Alors $v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n+5}{3(u_n+1)} - \frac{1}{u_n+1} = \frac{2u_n+5-3}{3(u_n+1)} = \frac{2u_n+2}{3(u_n+1)} = \frac{2(u_n+1)}{3(u_n+1)} = \frac{2}{3}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{3}$ (constante) : (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$.
 - $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}n = \frac{2n+1}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 - De $v_n = \frac{1}{1+u_n}$ on tire $1 + u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{3}{2n+1}$, d'où $u_n = \frac{3}{2n+1} - 1 = \frac{3-(2n+1)}{2n+1} = \frac{-2n+2}{2n+1}$.
- $u_n = \frac{-2n+2}{2n+1} = \frac{n(-2+\frac{2}{n})}{n(2+\frac{1}{n})} = \frac{-2+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}$; comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{-2}{2} = -1$.

Variable aléatoire

Solution 2.

- La somme des probabilités d'une loi de probabilité vaut 1 : $p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = 1$, donc $p(X=0) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{8}{8} - \frac{4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
- $E(X) = 0 \times p(X=0) + 1 \times p(X=1) + 2 \times p(X=2) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{6}{8} = \frac{7}{8}$.
Donc $E(X) = \frac{7}{8} = 0,875$.

Calcul des probabilités

Solution 3.

On tire successivement et sans remise 2 boules parmi 6 : un résultat est un couple ordonné de deux boules distinctes (arrangement), tous équiprobables : $\text{card}(\Omega) = A_6^2 = 6 \times 5 = 30$.

1. A : la première boule est rouge (4 choix) et la deuxième est rouge parmi les 3 rouges restantes (3 choix) : $\text{card}(A) = 4 \times 3 = 12$. Donc $p(A) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.
2. B : la première boule est noire (2 choix) et la deuxième est rouge (4 choix) : $\text{card}(B) = 2 \times 4 = 8$. Donc $p(B) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.
3. C est réalisé si la première est noire et la deuxième rouge ($2 \times 4 = 8$ résultats) ou si la première est rouge et la deuxième noire ($4 \times 2 = 8$ résultats) : $\text{card}(C) = 8 + 8 = 16$. Donc $p(C) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$.
4. Si B est réalisé (noire puis rouge), alors C est réalisé : $B \subset C$, donc $B \cap C = B$ et $p(B \cap C) = p(B) = \frac{4}{15} = \frac{60}{225}$.

D'autre part $p(B) \times p(C) = \frac{4}{15} \times \frac{8}{15} = \frac{32}{225}$.

Comme $p(B \cap C) \neq p(B) \times p(C)$, les événements B et C ne sont pas indépendants.

Étude d'une fonction numérique et calcul intégral

Solution 4.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x - 1) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1$; par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-1}{1} = -1$.

Interprétation : la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

2. (a) Pour tout x de $\mathbb{R}$: $3 - \frac{4}{e^x+1} = \frac{3(e^x+1)-4}{e^x+1} = \frac{3e^x+3-4}{e^x+1} = \frac{3e^x-1}{e^x+1} = f(x)$.
(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x+1} = 0$. D'après (a), $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 - 0 = 3$.

Interprétation : la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3. (a) On dérive l'expression $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x+1}$: avec $u(x) = e^x + 1$, $u'(x) = e^x$ et $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$, on obtient pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = 0 - 4 \times \frac{-e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$.

(b) Pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

(c) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. **Tableau de variations** : x de $-\infty$ à $+\infty$, $f'(x) > 0$, f croît de -1 (limite en $-\infty$) à 3 (limite en $+\infty$).

4. (a) $e^{-\ln 3} = \frac{1}{3}$, donc $f(-\ln 3) = \frac{3 \times \frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1-1}{\frac{4}{3}} = 0$.

(b) $f(0) = \frac{3e^0-1}{e^0+1} = \frac{3-1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$. f est continue et strictement croissante sur $[-\ln 3, 0]$, donc $f([-\ln 3, 0]) = [f(-\ln 3), f(0)] = [0, 1]$.

5. La tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$ a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. Or $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{4e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{4}{4} = 1$. Donc $(T) : y = x + 1$.

6. (a) $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 4e^x$, $u'(x) = 4e^x$, $v(x) = (e^x + 1)^2$, $v'(x) = 2e^x(e^x + 1)$. Pour tout x de $\mathbb{R}$: $f''(x) = \frac{4e^x(e^x+1)^2 - 4e^x \times 2e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^4} = \frac{4e^x(e^x+1)[(e^x+1) - 2e^x]}{(e^x+1)^4} = \frac{4e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$.

- (b) Pour tout $x : 4e^x > 0$ et $(e^x + 1)^3 > 0$, donc $f''(x)$ a le signe de $1 - e^x : 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$. Ainsi $f''(x) > 0$ sur $] -\infty, 0[$, $f''(0) = 0$ et $f''(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$: f'' s'annule en 0 en changeant de signe, donc (C_f) admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0, de coordonnées $(0, f(0)) = (0, 1)$.
7. (a) F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $e^x + 1 > 0$) et, avec $(\ln u)' = \frac{u'}{u} : F'(x) = 4 \times \frac{e^x}{e^x + 1} - 1 = \frac{4e^x - (e^x + 1)}{e^x + 1} = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- (b) Sur $[0, \ln 2]$, f est croissante et $f(0) = 1 > 0$, donc $f(x) \geq 1 > 0$: la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses. L'aire de la partie hachurée est donc $\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} f(x) dx = [F(x)]_0^{\ln 2} = F(\ln 2) - F(0)$.
- $F(\ln 2) = 4 \ln(e^{\ln 2} + 1) - \ln 2 = 4 \ln(2 + 1) - \ln 2 = 4 \ln 3 - \ln 2$ et $F(0) = 4 \ln(e^0 + 1) - 0 = 4 \ln 2$.
- $\mathcal{A} = 4 \ln 3 - \ln 2 - 4 \ln 2 = 4 \ln 3 - 5 \ln 2$.
- Donc l'aire de la partie hachurée est $(4 \ln 3 - 5 \ln 2)$ u.a. (soit environ 0,93 u.a.).