

Devoir surveillé n°2 : Corrigé

Semestre 1, devoir 2 : fonctions logarithme et exponentielle, nombres complexes

Nombres complexes

Solution 1.

- $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 13 = 16 - 52 = -36 = (6i)^2 < 0$. L'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{4+6i}{2} = 2 + 3i$ et $z_2 = \frac{4-6i}{2} = 2 - 3i$. Donc $S = \{2 + 3i, 2 - 3i\}$.
- $AC = |c - a| = |-3 - 3i| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$, $BC = |c - b| = |-3 + 3i| = 3\sqrt{2}$ et $AB = |b - a| = |-6i| = 6$. On a $AC = BC$, donc le triangle est isocèle en C , et $AC^2 + BC^2 = 18 + 18 = 36 = AB^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C . Il est donc rectangle et isocèle en C .
- (a) $|z - 2 - 3i| = |z - a| = AM$ et $|z + 1| = |z - c| = CM$. Donc $M \in (E_1) \iff AM = CM$: (E_1) est la médiatrice du segment $[AC]$.
(b) Soit Ω le point d'affixe 2. $|z - 2| = \Omega M$, donc (E_2) est le cercle de centre $\Omega(2, 0)$ et de rayon 3. $|a - 2| = |3i| = 3$, $|b - 2| = |-3i| = 3$ et $|c - 2| = |-3| = 3$: les points A , B et C appartiennent à (E_2) . (On retrouve que le triangle ABC , inscrit dans un cercle de diamètre $[AB]$ car Ω est le milieu de $[AB]$, est rectangle en C .)
- (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z + 1|^2 = (z + 1)(\overline{z + 1}) = (z + 1)(\overline{z} + 1) = z\overline{z} + z + \overline{z} + 1$ et de même $|z - 1|^2 = (z - 1)(\overline{z} - 1) = z\overline{z} - z - \overline{z} + 1$. En ajoutant : $|z + 1|^2 + |z - 1|^2 = 2z\overline{z} + 2 = 2(|z|^2 + 1)$.
(b) $|z| = 1$ donne $z\overline{z} = |z|^2 = 1$; comme $z \neq 0$, $\overline{z} = \frac{1}{z}$. Posons $w = \frac{z-1}{z+1}$ (bien défini car $z \neq -1$). Alors $\overline{w} = \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = \frac{\frac{1}{z}-1}{\frac{1}{z}+1} = \frac{1-z}{1+z} = -w$. Or un nombre complexe w vérifie $\overline{w} = -w$ si et seulement s'il est imaginaire pur. Donc $\frac{z-1}{z+1}$ est imaginaire pur.

Fonction logarithme népérien

Solution 2.

- (a) L'équation est définie pour $x - 1 > 0$ et $x + 2 > 0$, soit $x > 1$. Pour $x > 1$: $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = \ln((x - 1)(x + 2))$, et l'équation équivaut à $(x - 1)(x + 2) = 4$ (injectivité de $\ln$), soit $x^2 + x - 6 = 0$, dont les racines sont $x = 2$ et $x = -3$. Seule $x = 2$ vérifie $x > 1$: $S = \{2\}$.
(b) L'inéquation est définie pour $x > 0$. Posons $X = \ln x$: $X^2 - 3X + 2 \leq 0 \iff (X - 1)(X - 2) \leq 0 \iff 1 \leq X \leq 2$. Donc $1 \leq \ln x \leq 2$, soit $e \leq x \leq e^2$ (la fonction $\ln$ est strictement croissante et $\ln e = 1$, $\ln e^2 = 2$) : $S = [e, e^2]$.
- (a) Pour $x > 0$: $\ln(x^2 + 1) - \ln x = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^2 + 1) - \ln x) = +\infty$.

- (b) Forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour $x > 0, x \neq 1$: $\frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x+1}$. D'après la limite usuelle $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
3. (a) h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, du signe de $x-1$. Donc h est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$: elle admet en 1 un minimum $h(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$. Ainsi $h(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, c'est-à-dire $\ln x \leq x - 1$.
- (b) Soit $x > 0$. En appliquant (a) au réel $\frac{1}{x} > 0$: $\ln(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} - 1$, soit $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$, d'où $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$. Pour $n \geq 1$, on applique les deux inégalités à $x = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} > 0$: d'une part $\ln(1 + \frac{1}{n}) \leq (1 + \frac{1}{n}) - 1 = \frac{1}{n}$; d'autre part $\ln(1 + \frac{1}{n}) \geq 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Donc $\frac{1}{n+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$.

Fonction exponentielle et suites

Solution 3.

1. (a) $g(x) = 1 + e^{-x} - x$. En $-\infty$: $e^{-x} \rightarrow +\infty$ et $-x \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$. En $+\infty$: $e^{-x} \rightarrow 0$ et $-x \rightarrow -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$: g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, de $+\infty$ à $-\infty$.
- (b) $f(x) = x \iff g(x) = 0$. g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et $g(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ contient 0 : d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. De plus $g(1) = 1 + e^{-1} - 1 = e^{-1} > 0$ et $g(2) = e^{-2} - 1 < 0$ (car $e^{-2} < 1$) ; comme g est strictement décroissante, $1 < \alpha < 2$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = -e^{-x} < 0$: f est strictement décroissante. Pour $1 \leq x \leq 2$: $f(2) \leq f(x) \leq f(1)$, soit $1 + e^{-2} \leq f(x) \leq 1 + e^{-1}$. Or $1 + e^{-2} > 1$ et $1 + e^{-1} < 2$ (car $e^{-1} < 1$). Donc $f(x) \in [1, 2]$.
3. (a) Pour $x \in [1, 2]$, $|f'(x)| = e^{-x}$. Comme $x \geq 1$, $-x \leq -1$ et, la fonction exponentielle étant croissante, $e^{-x} \leq e^{-1} = \frac{1}{e}$. Donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{e}$.
- (b) Soit $x \in [1, 2]$. Si $x = \alpha$, l'inégalité est évidente ($0 \leq 0$). Sinon, f est continue et dérivable sur l'intervalle d'extrémités x et α , contenu dans $[1, 2]$; d'après le théorème des accroissements finis, il existe c strictement compris entre x et α tel que $f(x) - f(\alpha) = f'(c)(x - \alpha)$. Comme $c \in [1, 2]$, $|f'(c)| \leq \frac{1}{e}$, et $f(\alpha) = \alpha$; donc $|f(x) - \alpha| = |f'(c)| |x - \alpha| \leq \frac{1}{e} |x - \alpha|$.
4. (a) Par récurrence : $u_0 = 1 \in [1, 2]$; si $u_n \in [1, 2]$, alors d'après la question 2, $u_{n+1} = f(u_n) \in [1, 2]$. Donc $u_n \in [1, 2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Par récurrence. Initialisation : $|u_0 - \alpha| = \alpha - 1 \leq 1 = (\frac{1}{e})^0$ car $1 < \alpha < 2$. Hérédité : si $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{e})^n$, alors, comme $u_n \in [1, 2]$, la question 3(b) donne $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{e})^{n+1}$. Donc $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{e})^n$ pour tout n . Comme $0 < \frac{1}{e} < 1$, $\lim (\frac{1}{e})^n = 0$, et le théorème de comparaison donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.
- (c) Il suffit que $(\frac{1}{e})^n \leq 10^{-3}$, c'est-à-dire $e^{-n} \leq 10^{-3}$, soit $-n \leq -3 \ln 10$ (croissance de $\ln$), soit $n \geq 3 \ln 10 \approx 6,91$. L'entier $n = 7$ convient : $|u_7 - \alpha| \leq e^{-7} \approx 0,0009 < 10^{-3}$, donc u_7 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Problème d'analyse

Solution 4.

Partie A.

1. En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow \frac{0}{1+0} = 0$. La droite $y = 0$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$. En $+\infty$: en divisant par $e^x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ et $e^{-x} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow 1$. La droite $y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
2. $f(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$; en multipliant numérateur et dénominateur par e^x : $f(-x) = \frac{1}{e^x+1}$. Donc $f(x) + f(-x) = \frac{e^x+1}{1+e^x} = 1$. L'ensemble de définition $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x , $f(0-x) + f(0+x) = 2 \times \frac{1}{2}$: le point $\Omega(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.
3. $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 + e^x$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et $v(x) > 0$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. Or $1 - f(x) = \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}$, donc $f(x)(1 - f(x)) = \frac{e^x}{1+e^x} \times \frac{1}{1+e^x} = f'(x)$. Comme $e^x > 0$, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de 0 (en $-\infty$) à 1 (en $+\infty$).
4. $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Donc $(T) : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.
5. (a) Posons $p = f(x) \in]0, 1[$ (car f est strictement croissante et ses limites sont 0 et 1). Alors $f'(x) = p(1-p) > 0$, et $p(1-p) = -(p - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$. Donc $0 < f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
(b) Soit $\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - f(x)$ sur $\mathbb{R}$. φ est dérivable et $\varphi'(x) = \frac{1}{4} - f'(x) \geq 0$ d'après (a) : φ est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\varphi(0) = \frac{1}{2} - f(0) = 0$, on a $\varphi(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$ et $\varphi(x) \leq 0$ pour $x \leq 0$. Donc $f(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$ pour tout $x \geq 0$. Position relative : $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (T) sur $[0, +\infty[$ et au-dessus de (T) sur $] -\infty, 0]$; les deux se coupent au point Ω (qui est donc un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$).

Partie B.

1. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[=]0, 1[$. Soit $y \in]0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$: $y = f(x) \iff y(1+e^x) = e^x \iff e^x(1-y) = y \iff e^x = \frac{y}{1-y}$ (car $1-y \neq 0$) $\iff x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$, ce qui a un sens car $\frac{y}{1-y} > 0$. Donc $f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$.
2. Tracé : $(\mathcal{C})$ est croissante, comprise entre les asymptotes $y = 0$ et $y = 1$, symétrique par rapport à $\Omega(0, \frac{1}{2})$, tangente en Ω à (T) de pente $\frac{1}{4}$. La courbe $(\mathcal{C}')$ de f^{-1} est la symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à la première bissectrice $y = x$: elle est définie sur $]0, 1[$, croissante, admet les asymptotes verticales $x = 0$ et $x = 1$, passe par le point $(\frac{1}{2}, 0)$ où sa tangente a pour pente 4.

Partie C.

1. Pour $y \in]0, 1[$, $1-y \in]0, 1[$ et $f^{-1}(1-y) = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right) = -\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = -f^{-1}(y)$.
2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{k}{n+1} \in]0, 1[$ et $1 - \frac{k}{n+1} = \frac{n+1-k}{n+1}$. D'après la question 1, $f^{-1}\left(\frac{k}{n+1}\right) = -f^{-1}\left(\frac{n+1-k}{n+1}\right)$. Dans la somme S_n , posons $j = n+1-k$; lorsque k parcourt $\{1, \dots, n\}$, j parcourt aussi $\{1, \dots, n\}$, donc $S_n = \sum_{k=1}^n f^{-1}\left(\frac{k}{n+1}\right) = -\sum_{j=1}^n f^{-1}\left(\frac{j}{n+1}\right) = -S_n$. D'où $2S_n = 0$, soit $S_n = 0$.
3. Si $x = 0$, l'inégalité est évidente. Sinon, f est continue et dérivable sur l'intervalle d'extrémités 0 et x ; d'après le théorème des accroissements finis, il existe c strictement compris entre 0 et x tel que $f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$. Avec $f(0) = \frac{1}{2}$ et $0 < f'(c) \leq \frac{1}{4}$ (question A.5(a)) : $|f(x) - \frac{1}{2}| = f'(c) |x| \leq |x| \frac{1}{4}$.