

Devoir surveillé n°4 : Corrigé

Semestre 2, devoir 2 : étude de fonctions, vecteurs et géométrie de l'espace

Vecteurs de l'espace

Solution 1.

1. $\overrightarrow{AB}(3-1; 1-0; 0-2)$, soit $\overrightarrow{AB}(2; 1; -2)$, et $\overrightarrow{AC}(-1-1; 2-0; 1-2)$, soit $\overrightarrow{AC}(-2; 2; -1)$. Le repère est orthonormé, donc $AB = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$ et $AC = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-2) + 1 \times 2 + (-2) \times (-1) = -4 + 2 + 2 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en A ; comme de plus $AB = AC = 3$, **le triangle ABC est rectangle et isocèle en A .**
3. $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (règle du parallélogramme). Or $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (0; 3; -3)$, donc $x_D = 1 + 0 = 1$, $y_D = 0 + 3 = 3$, $z_D = 2 - 3 = -1$: $D(1; 3; -1)$. (Vérification : $\overrightarrow{CD}(2; 1; -2) = \overrightarrow{AB}$.) Ce parallélogramme a un angle droit en A (question 2) : c'est un rectangle ; et deux côtés consécutifs égaux $AB = AC$: **$ABDC$ est un carré.**
4. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : $\frac{2}{-2} \neq \frac{1}{2}$). Supposons qu'il existe des réels a et b tels que $\vec{u} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. En coordonnées :

$$\begin{cases} 2a - 2b = 1 \\ a + 2b = 2 \\ -2a - b = 2 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $a = 2 - 2b$; en reportant dans la première : $2(2 - 2b) - 2b = 1$, soit $4 - 6b = 1$, d'où $b = \frac{1}{2}$ puis $a = 1$. Mais alors la troisième équation donne $-2 \times 1 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \neq 2$: le système n'a pas de solution. Donc $\vec{u}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: **les trois vecteurs ne sont pas coplanaires** (ils forment une base de l'espace). (Autre méthode : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 + 2 - 4 = 0$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 + 4 - 2 = 0$; si $\vec{u}$ était dans le plan dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, il serait orthogonal à lui-même, donc nul, ce qui est faux.)

Géométrie analytique de l'espace

Solution 2.

1. $\overrightarrow{AB}(2; 1; -2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2; 2; -1)$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) (les points A, B, C ne sont pas alignés). On calcule : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times (-2) = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + 2 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$. Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : **$\vec{n}$ est un vecteur normal à (ABC) .** Le plan admet donc

- une équation de la forme $x + 2y + 2z + d = 0$. Comme $A(1;0;2)$ appartient au plan : $1 + 0 + 4 + d = 0$, soit $d = -5$. Ainsi $(ABC) : x + 2y + 2z - 5 = 0$. (Vérification : $B : 3 + 2 + 0 - 5 = 0$; $C : -1 + 4 + 2 - 5 = 0$.)
2. On met sous forme canonique : $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$, $y^2 - 6y = (y - 3)^2 - 9$, $z^2 - 4z = (z - 2)^2 - 4$. L'équation devient $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 - 1 - 9 - 4 + 5 = 0$, soit

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 9 = 3^2.$$

(S) est la sphère de centre $\Omega(1;3;2)$ et de rayon 3.

3. (a) (D) passe par $\Omega(1;3;2)$ et est dirigée par $\vec{n}(1;2;2)$:

$$(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t, \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (b) On remplace dans l'équation du plan : $(1 + t) + 2(3 + 2t) + 2(2 + 2t) - 5 = 0$, soit $9t + 6 = 0$, d'où $t = -\frac{2}{3}$. Alors $x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$ et $z = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$: $H(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3})$. Comme (D) est dirigée par un vecteur normal au plan, H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC) .
4. (a) $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1+2 \times 3+2 \times 2-5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$. Par ailleurs $\overrightarrow{\Omega H}(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3})$ et $\Omega H^2 = \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} = \frac{36}{9} = 4$, donc $\Omega H = 2$: on retrouve bien la distance de Ω au plan (ce qui est normal, H étant le projeté orthogonal de Ω).
- (b) La distance de Ω au plan vaut 2, strictement inférieure au rayon 3 de la sphère : le plan coupe la sphère. Soit M un point de (ABC) . Comme (ΩH) est perpendiculaire au plan, le triangle $\Omega H M$ est rectangle en H et, d'après le théorème de Pythagore, $\Omega M^2 = \Omega H^2 + H M^2 = 4 + H M^2$. Donc $M \in (S) \iff \Omega M^2 = 9 \iff H M^2 = 5 \iff H M = \sqrt{5}$. **L'intersection de (S) et de (ABC) est le cercle du plan (ABC) de centre $H(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3})$ et de rayon $\sqrt{5}$.**

Étude d'une fonction irrationnelle

Solution 3.

1. Pour tout réel x : $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 \geq 4 > 0$, donc la racine carrée est toujours définie : $D_g = \mathbb{R}$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et de même en $-\infty$; comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.
2. $g = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 5 > 0$ et $u'(x) = 2x + 2$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = u' \frac{x}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$. Le dénominateur est strictement positif : $g'(x)$ a le signe de $x + 1$, négatif sur $] -\infty, -1[$, nul en -1 , positif sur $] -1, +\infty[$. $g(-1) = \sqrt{1 - 2 + 5} = \sqrt{4} = 2$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty \searrow$	2	$\nearrow +\infty$

- g est strictement décroissante sur $] -\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$; elle admet un minimum égal à 2 en $x = -1$.
3. Pour $x > -1$, $g(x) + x + 1 > 0$ et, avec la quantité conjuguée : $g(x) - (x + 1) = \frac{(x^2+2x+5)-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1} = \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\sqrt{x^2+2x+5} \rightarrow +\infty$ et $x+1 \rightarrow +\infty$, donc le dénominateur tend vers $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x + 1)] = 0$. **La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à (C_g) en $+\infty$.** (De plus $g(x) - (x + 1) > 0$: la courbe est au-dessus de cette asymptote.)
4. De même, pour $x < -1$ on a $-x - 1 > 0$, donc $g(x) - x - 1 > 0$ et $g(x) - (-x - 1) = g(x) + x + 1 = \frac{(x^2+2x+5)-(-x-1)^2}{\sqrt{x^2+2x+5}-x-1} = \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+5}-x-1}$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $\sqrt{x^2+2x+5} \rightarrow +\infty$ et $-x - 1 \rightarrow +\infty$, donc le dénominateur tend vers $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (-x - 1)] = 0$. **La droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à (C_g) en $-\infty$.**

Étude d'une fonction rationnelle

Solution 4.

1. $f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 1$: $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.
- En $\pm\infty$: $f(x) = \frac{x^2(2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})} = x \times \frac{2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$, et le quotient tend vers 2. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
 - En 1 : le numérateur tend vers $2 - 3 + 3 = 2 > 0$ et le dénominateur vers 0. Si $x \rightarrow 1^+$, $x - 1 \rightarrow 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$; si $x \rightarrow 1^-$, $x - 1 \rightarrow 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

Interprétation : **la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (C_f) .**

2. Pour $x \neq 1$: $2x - 1 + \frac{2}{x-1} = \frac{(2x-1)(x-1)+2}{x-1} = \frac{2x^2-3x+1+2}{x-1} = \frac{2x^2-3x+3}{x-1} = f(x)$. Alors $f(x) - (2x - 1) = \frac{2}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x-1} = 0$: **la droite $(\Delta) : y = 2x - 1$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.**
3. $f(x) - (2x - 1) = \frac{2}{x-1}$ est du signe de $x - 1$: sur $]1, +\infty[$, (C_f) est au-dessus de (Δ) ; sur $] -\infty, 1[$, (C_f) est au-dessous de (Δ) . La courbe ne coupe pas (Δ) .
4. En dérivant $f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x-1}$: $f'(x) = 2 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)^2-2}{(x-1)^2} = \frac{2[(x-1)^2-1]}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1-1)(x-1+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$. Sur D_f , $(x-1)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $2x(x-2)$, positif sur $] -\infty, 0[$ et sur $]2, +\infty[$, négatif sur $]0, 1[$ et sur $]1, 2[$, nul en 0 et en 2. Valeurs : $f(0) = \frac{3}{-1} = -3$ et $f(2) = \frac{8-6+3}{1} = 5$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 -		- 0	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$-3 \searrow$	$-\infty +\infty$	$\searrow 5$	$\nearrow +\infty$

f est croissante sur $] -\infty, 0]$, décroissante sur $[0, 1[$ et sur $]1, 2]$, croissante sur $[2, +\infty[$; $f(0) = -3$ est un maximum local et $f(2) = 5$ un minimum local.

5. La tangente au point d'abscisse x_0 est parallèle à la droite $y = -6x$ si et seulement si $f'(x_0) = -6$: $2 - \frac{2}{(x_0-1)^2} = -6 \iff \frac{2}{(x_0-1)^2} = 8 \iff (x_0-1)^2 = \frac{1}{4} \iff x_0-1 = \frac{1}{2}$ ou $x_0-1 = -\frac{1}{2}$, soit $x_0 = \frac{3}{2}$ ou $x_0 = \frac{1}{2}$. Or $f(\frac{3}{2}) = 3 - 1 + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 + 4 = 6$ et $f(\frac{1}{2}) = 1 - 1 + \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$. Les points cherchés sont $M_1(\frac{1}{2}; -4)$ et $M_2(\frac{3}{2}; 6)$.
6. Tracé : on place l'asymptote verticale $x = 1$ et l'asymptote oblique $(\Delta) : y = 2x - 1$, les points $(0; -3)$ (tangente horizontale, maximum local) et $(2; 5)$ (tangente horizontale,

minimum local), ainsi que M_1 et M_2 . La branche de gauche monte de $-\infty$ jusqu'à -3 en restant au-dessous de (Δ) , puis redescend vers $-\infty$ le long de l'asymptote verticale ; la branche de droite descend de $+\infty$ jusqu'à 5 puis remonte vers $+\infty$ en se rapprochant de (Δ) par au-dessus. La courbe ne coupe pas l'axe des abscisses (le discriminant de $2x^2 - 3x + 3$ vaut $9 - 24 < 0$) et coupe l'axe des ordonnées en $(0; -3)$.