

Devoir surveillé n°3 : Corrigé

Semestre 2, devoir 1 : limites et dérivation

Limites d'une fonction

Solution 1.

- En $-\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré : $-3x^3 + x^2 - 1 = x^3(-3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3})$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}) = -3$. Par produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + x^2 - 1) = +\infty$.
- Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par le terme dominant : $\frac{3x^2-x+2}{x^2+4} = \frac{x^2(3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}{x^2(1+\frac{4}{x^2})} = \frac{3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}$. Comme $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, $\frac{2}{x^2} \rightarrow 0$ et $\frac{4}{x^2} \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-x+2}{x^2+4} = \frac{3}{1} = 3$.
- En $x = 2$, numérateur et dénominateur s'annulent : forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On factorise par $(x-2)$: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ (racines 2 et 3) et $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Pour $x \neq 2$: $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{x-3}{x+2}$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}$.
- Forme indéterminée $\infty - \infty$. On multiplie par la quantité conjuguée : $\sqrt{x^2+4x} - x = \frac{(x^2+4x)-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$. Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2+4x} = x\sqrt{1+\frac{4}{x}}$, donc $\sqrt{x^2+4x} - x = \frac{4x}{x(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1)} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$. Comme $\frac{4}{x} \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+4x} - x) = \frac{4}{1+1} = 2$.
- Quand $x \rightarrow 1$, le numérateur $2x-5$ tend vers $-3 < 0$ et le dénominateur $1-x$ tend vers 0 : la limite est infinie et son signe dépend du côté.
 - Si $x \rightarrow 1^+$: $x > 1$ donc $1-x < 0$, $1-x \rightarrow 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-5}{1-x} = +\infty$ (quotient de -3 par un nombre négatif tendant vers 0).
 - Si $x \rightarrow 1^-$: $1-x \rightarrow 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-5}{1-x} = -\infty$.

Interprétation : la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe de $x \rightarrow \frac{2x-5}{1-x}$.

- On écrit $\frac{2x+\cos x}{x+1} = \frac{2x}{x+1} + \frac{\cos x}{x+1}$. D'une part $\frac{2x}{x+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{x}} \rightarrow 2$. D'autre part, pour $x > 0$: $-1 \leq \cos x \leq 1$ donne $-\frac{1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$; par encadrement (théorème des gendarmes), $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$. Par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+\cos x}{x+1} = 2$.

Dérivation

Solution 2.

- (a) $f(4) = \sqrt{9} = 3$. Pour $x \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$, $x \neq 4$, le taux d'accroissement de f entre 4 et x vaut, avec la quantité conjuguée : $\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} = \frac{(2x+1)-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{2}{\sqrt{2x+1}+3}$. Quand $x \rightarrow 4$, $\sqrt{2x+1} \rightarrow 3$, donc $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}$. Cette limite existe et est finie : **f est dérivable en 4 et $f'(4) = \frac{1}{3}$** .
 (b) Tangente au point d'abscisse 4 : $y = f'(4)(x-4) + f(4) = \frac{1}{3}(x-4) + 3$, soit $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

2. (a) $g = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = x - 2$, $v'(x) = 1$; sur $]2, +\infty[$, v ne s'annule pas : $g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2x(x-2) - (x^2+1)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2}$.
- (b) $(\cos(2x))' = -2\sin(2x)$ (dérivée d'une composée) et $(x \sin x)' = 1 \times \sin x + x \cos x$ (dérivée d'un produit). Donc $h'(x) = -2\sin(2x) + \sin x + x \cos x$.
- (c) $k = \sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 3 > 0$ et $u'(x) = 2x$: $k'(x) = u' \frac{x}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.
3. Pour $x > 0$: $\varphi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}$. Pour $x > 0$, on a $1+x > 1$ donc $\sqrt{1+x} > 1$ et $\varphi'(x) > 0$: φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $\varphi(0) = 1 + 0 - \sqrt{1} = 0$, on obtient pour tout $x \geq 0$: $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, c'est-à-dire $1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} \geq 0$, soit $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Limites et dérivation

Solution 3.

1. $f(x)$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0$: $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. (a) En $\pm\infty$, on factorise par les termes dominants : $f(x) = \frac{x^2(1+\frac{3}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})} = x \times \frac{1+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$. Le quotient $\frac{1+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$ tend vers 1, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- (b) Quand $x \rightarrow 1$, le numérateur $x^2 + 3$ tend vers $4 > 0$ et le dénominateur $x - 1$ tend vers 0. Si $x \rightarrow 1^+$, $x - 1 \rightarrow 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$; si $x \rightarrow 1^-$, $x - 1 \rightarrow 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$. Interprétation : **la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (C_f) .**
3. (a) Pour $x \neq 1$: $x + 1 + \frac{4}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+4}{x-1} = \frac{x^2-1+4}{x-1} = \frac{x^2+3}{x-1} = f(x)$. Alors $f(x) - (x+1) = \frac{4}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x-1} = 0$: **la droite $(\Delta) : y = x + 1$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.**
- (b) $f(x) - (x+1) = \frac{4}{x-1}$ est du signe de $x - 1$:
- sur $]1, +\infty[$, $f(x) - (x+1) > 0$: (C_f) est au-dessus de (Δ) ;
 - sur $] -\infty, 1[$, $f(x) - (x+1) < 0$: (C_f) est au-dessous de (Δ) .

La courbe ne coupe jamais son asymptote.

4. (a) En dérivant l'écriture $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$ (avec $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$) : $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$. (On peut aussi dériver le quotient : $f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, et $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$.)
- (b) Sur D_f , $(x-1)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $(x-3)(x+1)$, trinôme de racines -1 et 3 , positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. Donc $f'(x) > 0$ sur $] -\infty, -1[$ et sur $]3, +\infty[$, $f'(x) < 0$ sur $] -1, 1[$ et sur $]1, 3[$, et f' s'annule en -1 et en 3 . Valeurs : $f(-1) = \frac{1+3}{-1-1} = -2$ et $f(3) = \frac{9+3}{3-1} = 6$.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$-2 \searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow 6$	$\nearrow +\infty$

f est croissante sur $] -\infty, -1]$, décroissante sur $[-1, 1[$ et sur $]1, 3]$, croissante sur $[3, +\infty[$; $f(-1) = -2$ est un maximum local et $f(3) = 6$ un minimum local.

5. $f(2) = \frac{4+3}{2-1} = 7$ et $f'(2) = \frac{(2-3)(2+1)}{(2-1)^2} = -3$. La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2) = -3(x-2) + 7$, soit $(T) : y = -3x + 13$.