

Devoir surveillé n°2 : Corrigé

Semestre 1, devoir 2 : produit scalaire, suites, trigonométrie et rotation

Produit scalaire dans le plan

Solution 1.

- (a) $\overrightarrow{AB}(5-1; 1-(-1))$, soit $\overrightarrow{AB}(4; 2)$, et $\overrightarrow{AC}(2-1; 2-(-1))$, soit $\overrightarrow{AC}(1; 3)$. Dans un repère orthonormé : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + 2 \times 3 = 10$.
 (b) $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$, donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{10}{2\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{10}{2\sqrt{50}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Comme $\widehat{BAC} \in [0, \pi]$, on obtient $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$ (soit 45°).
- $\overrightarrow{BC}(2-5; 2-1)$, soit $\overrightarrow{BC}(-3; 1)$, et $BC = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$. Ainsi $AC = BC = \sqrt{10}$: le triangle est isocèle en C . De plus $AC^2 + BC^2 = 10 + 10 = 20 = AB^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle est rectangle en C . Conclusion : **ABC est rectangle et isocèle en C** . (On peut aussi vérifier $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-1)(3) + (-3)(-1) = 0$.)
- I est le milieu de $[AB]$; le théorème de la médiane dans le triangle CAB donne : $CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{AB^2}{2}$, soit $10 + 10 = 2CI^2 + \frac{20}{2}$, d'où $2CI^2 = 10$, $CI^2 = 5$ et $CI = \sqrt{5}$. (Vérification : $I(3; 0)$, $\overrightarrow{CI}(1; -2)$ et $CI = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.)
- $M(x; y)$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, c'est-à-dire $(x-1)(x-5) + (y+1)(y-1) = 0$, soit $x^2 - 6x + 5 + y^2 - 1 = 0$:

$$(\Gamma) : x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0, \quad \text{ou encore} \quad (x-3)^2 + y^2 = 5.$$

(Γ) est le cercle de centre $I(3; 0)$ et de rayon $\sqrt{5}$. Pour $C(2; 2)$: $2^2 + 2^2 - 6 \times 2 + 4 = 4 + 4 - 12 + 4 = 0$, donc $C \in (\Gamma)$. C'est cohérent avec la question 2 : le triangle ABC est rectangle en C , donc C est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

- Pour $M(x; y)$: $MA^2 - MB^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 - (x-5)^2 - (y-1)^2$. En développant : $MA^2 - MB^2 = (x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1) - (x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1) = 8x + 4y - 24$. Donc $M \in (E) \iff 8x + 4y - 24 = 8 \iff 2x + y - 8 = 0$. (E) est la droite d'équation $2x + y - 8 = 0$. Un vecteur normal de cette droite est $\vec{n}(2; 1)$ et $\overrightarrow{AB}(4; 2) = 2\vec{n}$: **(E) est perpendiculaire à la droite (AB)** , conformément au cours (ligne de niveau de $MA^2 - MB^2$).

Suites numériques

Solution 2.

- $u_1 = \frac{1}{2} \times 3 + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$ et $u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} + 2 = \frac{7}{4} + 2 = \frac{15}{4}$.

- Supposons $u_n < 4$. Alors $\frac{1}{2}u_n < 2$, donc $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 < 2 + 2 = 4$. Ainsi, si $u_n < 4$ alors $u_{n+1} < 4$. Comme $u_0 = 3 < 4$, on en déduit de proche en proche (raisonnement par récurrence) que $u_1 < 4$, puis $u_2 < 4$, et ainsi de suite : **pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 4$.**
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 2 - u_n = 2 - \frac{1}{2}u_n = \frac{4-u_n}{2}$. D'après la question 2, $4 - u_n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$: **la suite (u_n) est strictement croissante.**
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$. Donc (v_n) est **une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$** , de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -1$.
- (v_n) est géométrique, donc $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n = v_n + 4$: $u_n = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. (On retrouve $u_0 = 3$, $u_1 = \frac{7}{2}$, $u_2 = \frac{15}{4}$.)
- $S_n = \sum_{k=0}^n \left(4 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = 4(n+1) - \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$. La somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$ vaut $\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Donc $S_n = 4(n+1) - 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4n + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$. (Vérification : $S_0 = 3 = u_0$ et $S_1 = 4 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2} = 3 + \frac{7}{2}$.)

Calcul trigonométrique

Solution 3.

- Avec la formule $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$: $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
- On écrit $3a = 2a + a$ et on applique la formule d'addition puis les formules de duplication $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ et $\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$: $\sin(3a) = \sin(2a) \cos a + \cos(2a) \sin a = 2 \sin a \cos^2 a + (1 - 2 \sin^2 a) \sin a$. Avec $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$: $\sin(3a) = 2 \sin a (1 - \sin^2 a) + \sin a - 2 \sin^3 a = 2 \sin a - 2 \sin^3 a + \sin a - 2 \sin^3 a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$.
- Avec $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$, l'équation devient $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. Posons $X = \cos x$: $2X^2 - X - 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, d'où $X = \frac{1+3}{4} = 1$ ou $X = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$.
 - $\cos x = 1 \iff x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 - $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iff x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est $S = \{2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire l'ensemble des réels de la forme $\frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. (Autre méthode : $\cos(2x) - \cos x = -2 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, qui s'annule si et seulement si $\frac{3x}{2} = k\pi$ ou $\frac{x}{2} = k\pi$, ce qui redonne $x = \frac{2k\pi}{3}$.)

- (a) Ici $a = 1$ et $b = -\sqrt{3}$, donc $R = \sqrt{1+3} = 2$, et φ vérifie $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Ainsi $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. (Vérification : $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$.)
 (b) L'équation s'écrit $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$, soit $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Donc $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, c'est-à-dire $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Dans $] -\pi, \pi]$, les seules solutions sont obtenues pour $k = 0$: $x = -\frac{\pi}{12}$ et $x = -\frac{7\pi}{12}$.

Rotation dans le plan

Solution 4.

1. Pour la rotation de centre O et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$, l'image $M'(x'; y')$ de $M(x; y)$ vérifie $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$ et $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$. Avec $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

2. Pour $A(2; 0)$: $x' = \frac{1}{2} \times 2 - 0 = 1$ et $y' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 + 0 = \sqrt{3}$, donc $A'(1; \sqrt{3})$. Ensuite $OA = 2$, $OA' = \sqrt{1+3} = 2$ (la rotation conserve les distances) et $AA' = \sqrt{(1-2)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{1+3} = 2$. Les trois côtés ont la même longueur 2 : **le triangle OAA' est équilatéral**. (C'était prévisible : $OA' = OA$ et l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$ vaut $\frac{\pi}{3}$.)
3. Pour $A'(1; \sqrt{3})$: $x' = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$ et $y' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$. Donc $B(-1; \sqrt{3})$.
4. $x^2 + y^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$: (C) est le cercle de centre $A(2; 0)$ et de rayon 2. L'image d'un cercle par une rotation est le cercle de même rayon dont le centre est l'image du centre. Comme $R(A) = A'(1; \sqrt{3})$, (C') est le cercle de centre A' et de rayon 2 :

$$(C') : (x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 4, \text{ soit } x^2 + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y = 0.$$

5. L'axe des abscisses est la droite (OA) . L'image d'une droite par une rotation est une droite ; comme $R(O) = O$ et $R(A) = A'$, on a $(D') = (OA')$. Cette droite passe par O et est dirigée par $\overrightarrow{OA'}(1; \sqrt{3})$, donc $(D') : y = \sqrt{3}x$ (ou $\sqrt{3}x - y = 0$).
6. Le centre de gravité de OAA' est le barycentre de $(O, 1)$, $(A, 1)$, $(A', 1)$: $G(\frac{0+2+1}{3}; \frac{0+0+\sqrt{3}}{3})$, soit $G(1; \frac{\sqrt{3}}{3})$. Son image par R : $x' = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ et $y' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Donc $R(G)(0; \frac{2\sqrt{3}}{3})$. Le centre de gravité G' du triangle $OA'B$ a pour coordonnées $(\frac{0+1-1}{3}; \frac{0+\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3}) = (0; \frac{2\sqrt{3}}{3})$. Ainsi $R(G) = G'$: **$R(G)$ est le centre de gravité du triangle $OA'B$** . Ce résultat illustre le fait qu'une rotation conserve les barycentres : l'image du centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité du triangle image ($R(O) = O$, $R(A) = A'$, $R(A') = B$).