

Devoir surveillé n°1 : Mathématiques

Semestre 1, devoir 1 : limites et continuité, dérivation, suites numériques

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte trois exercices indépendants. Barème : 5 + 6 + 9 points.

Limites et continuité

Exercice 1 (5 points).

- Calculer les limites suivantes :
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$; (0,75 pt)
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{x}$; (1 pt)
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x}-1}$. (1 pt)
- Soit f la fonction définie sur $[-7, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ si $x \neq 2$ et $f(2) = m$, où m est un réel. Déterminer la valeur de m pour laquelle f est continue en 2. (1 pt)
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 2x - 5$.
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1, 2[$. (0,75 pt)
 - Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} . (0,5 pt)

Dérivation et étude de fonctions

Exercice 2 (6 points). Partie A. Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Étudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat. (1 pt)
 - Montrer que pour tout $x > 1$: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, puis dresser le tableau de variations de f . (1 pt)
- Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$. (0,75 pt)
 - Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (D) . (0,5 pt)

Partie B. Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = \sqrt{t}$.

- En appliquant le théorème des accroissements finis à h sur l'intervalle $[n, n+1]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), montrer que :

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

(1,25 pt)

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n > 2(\sqrt{n+1} - 1)$. (1 pt)
- (b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. (0,5 pt)

Suites numériques

Exercice 3 (9 points). On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
2. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - 1 = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$. (0,5 pt)
(b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 1$. (0,75 pt)
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$. (0,75 pt)
(b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante. (0,75 pt)
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. (1,25 pt)
5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme. (1,25 pt)
6. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n , et retrouver la limite de (u_n) . (1,25 pt)
7. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(u_n - 1)(u_{n+1} - 1) = 3(u_n - u_{n+1})$. (0,75 pt)
(b) On pose $S_n = \sum_{k=0}^n (u_k - 1)(u_{k+1} - 1)$. Exprimer S_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. (1,25 pt)