

Devoir surveillé n°1 : Corrigé

Semestre 1, devoir 1 : limites et continuité, dérivation, suites numériques

Limites et continuité

Solution 1.

- (a) C'est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. On multiplie par la quantité conjuguée : pour $x > 0$, $\sqrt{x^2 + 3x} - x = \frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{3x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}}+x} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}$. Comme $\frac{3}{x} \rightarrow 0$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \frac{3}{2}$.
- (b) Pour $x < 0$, $\sqrt{x^2 + 1} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$. Donc $\frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{x} = \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2x}{x} = -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 2$. Comme $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{x} = -1 + 2 = 1$.
- (c) Forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On écrit, pour $x \neq 0$ proche de 0 : $\frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{\sin(2x)}{x} \times \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$. D'une part $\frac{\sin(2x)}{x} = 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} \rightarrow 2 \times 1 = 2$ (limite usuelle $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ avec $u = 2x \rightarrow 0$). D'autre part, par la quantité conjuguée, $\frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(1+x)-1} = \sqrt{1+x} + 1 \rightarrow 2$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x}-1} = 2 \times 2 = 4$.
- f est continue en 2 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = m$. Pour $x \neq 2$: $f(x) = \frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{(x+7)-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+7}+3}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{9+3}} = \frac{1}{6}$. La fonction f est continue en 2 si et seulement si $m = \frac{1}{6}$.
- (a) g est une fonction polynôme, donc continue sur $[1, 2]$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, donc g est strictement croissante sur $[1, 2]$. De plus $g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 < 0$ et $g(2) = 8 + 4 - 5 = 7 > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (et la stricte monotonie de g), l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1, 2[$.
(b) $g(1,3) = 2,197 + 2,6 - 5 = -0,203 < 0$ et $g(1,4) = 2,744 + 2,8 - 5 = 0,544 > 0$. Comme g est strictement croissante, $1,3 < \alpha < 1,4$.

Dérivation et étude de fonctions

Solution 2.

Partie A.

- (a) Pour $x > 1$: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1} = \frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}{x-1} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$. Quand $x \rightarrow 1^+$, $\sqrt{x+1} \rightarrow \sqrt{2}$ et $\sqrt{x-1} \rightarrow 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$. La fonction f n'est pas dérivable à droite en 1 ; la courbe $(\mathcal{C})$ admet au point $A(1, 0)$ une demi-tangente verticale.
(b) Pour $x > 1$, $x^2 - 1 > 0$ et la fonction $x \rightarrow x^2 - 1$ est dérivable : f est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composée, avec la formule $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$: $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Comme $x > 0$ et $\sqrt{x^2-1} > 0$, on a $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, avec $f(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (car $x^2 - 1 \rightarrow +\infty$).

2. (a) Pour $x \geq 1$: $f(x) - x = \sqrt{x^2 - 1} - x = \frac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}$. Comme $\sqrt{x^2 - 1} + x \rightarrow +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$: la droite $(D) : y = x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
 (b) Pour tout $x \geq 1$, $f(x) - x = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x} < 0$. Donc $(\mathcal{C})$ est entièrement au-dessous de (D) sur $[1, +\infty[$.

Partie B.

1. La fonction $h : t \rightarrow \sqrt{t}$ est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$ (car $n \geq 1 > 0$), avec $h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]n, n+1[$ tel que $h(n+1) - h(n) = h'(c)(n+1 - n)$, c'est-à-dire $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$. Or $n < c < n+1$ donne $\sqrt{n} < \sqrt{c} < \sqrt{n+1}$ (la fonction racine carrée est strictement croissante), puis, par passage à l'inverse entre nombres strictement positifs, $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$. D'où l'encadrement demandé.
2. (a) D'après la question précédente, pour tout entier $k \geq 1$: $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$, soit $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$. En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$. La somme de droite est télescopique : $\sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1$. Donc $S_n > 2(\sqrt{n+1} - 1)$.
 (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = +\infty$. Comme $S_n > 2(\sqrt{n+1} - 1)$ pour tout $n \geq 1$, le théorème de comparaison donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Suites numériques

Solution 3.

1. $u_1 = \frac{4 \times 2 - 1}{2+2} = \frac{7}{4}$ et $u_2 = \frac{4 \times \frac{7}{4} - 1}{\frac{7}{4}+2} = \frac{6}{\frac{15}{4}} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$.
2. (a) $u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1 = \frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{3u_n - 3}{u_n + 2} = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$.
 (b) **Initialisation** : $u_0 = 2 > 1$. **Hérédité** : supposons $u_n > 1$ pour un entier n . Alors $u_n - 1 > 0$ et $u_n + 2 > 3 > 0$, donc d'après (a), $u_{n+1} - 1 = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2} > 0$, soit $u_{n+1} > 1$. **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
3. (a) $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$.
 (b) Pour tout n , $(u_n - 1)^2 \geq 0$ et $u_n + 2 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ (et même < 0 puisque $u_n \neq 1$) : la suite (u_n) est décroissante.
4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ , et $\ell \geq 1$. Soit $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$; f est continue sur $[1, +\infty[$ (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et $u_{n+1} = f(u_n)$. Par passage à la limite, $\ell = f(\ell)$, soit $\ell(\ell + 2) = 4\ell - 1$, c'est-à-dire $\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$, ou encore $(\ell - 1)^2 = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
5. Pour tout n , $u_n > 1$ donc $u_n - 1 \neq 0$ et v_n est bien défini. D'après la question 2(a), $u_{n+1} - 1 = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$, donc $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} = \frac{(u_n - 1) + 3}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{u_n - 1} = v_n + \frac{1}{3}$. La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = 1$.
6. $v_n = v_0 + nr = 1 + \frac{n}{3} = \frac{n+3}{3}$. Comme $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$, on a $u_n = 1 + \frac{1}{v_n} = 1 + \frac{3}{n+3} = \frac{n+6}{n+3}$. (Vérification : $u_1 = \frac{7}{4}$ et $u_2 = \frac{8}{5}$.) Comme $\frac{3}{n+3} \rightarrow 0$, on retrouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
7. (a) D'après 2(a) et 3(a) : $(u_n - 1)(u_{n+1} - 1) = (u_n - 1) \times \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2} = 3 \frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2} = 3(u_n - u_{n+1})$.
 (b) $S_n = \sum_{k=0}^n 3(u_k - u_{k+1}) = 3 \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1})$. La somme est télescopique : $\sum_{k=0}^n (u_k -$

$u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$. Donc $S_n = 3(u_0 - u_{n+1}) = 3\left(2 - \frac{n+7}{n+4}\right) = 3 \times \frac{2n+8-n-7}{n+4} = \frac{3(n+1)}{n+4}$. (Vérification : $S_0 = (u_0 - 1)(u_1 - 1) = 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$.) Comme $\lim u_{n+1} = 1$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 3(2 - 1) = 3$ (on le retrouve avec $\frac{3(n+1)}{n+4} \rightarrow 3$).